OVERSTAPDEEL

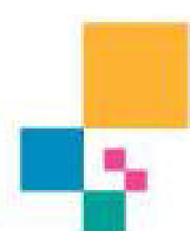
FLEX

WISKUNDE

12E EDITIE

4 VMBO naar HAVO/MBO

# GETAL & RUIMTE



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

# Getal & Ruimte

## Overstapdeel

## **4 VMBO** naar **4 HAVO/MBO-techniek**

**Twaalfde editie, 2021**

Noordhoff
Groningen

**Auteurs**

C. J. Admiraal
J. H. Dijkhuis
J. A. Verbeek
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse
M. Vos
B. W. van Laarhoven

# Voorwoord

Aan de docent(e),

**Het overstapdeel**

Het overstapdeel 4 VMBO naar 4 HAVO/MBO-techniek is bestemd voor leerlingen die na het vmbo hun opleiding vervolgen in havo 4, of een technische opleiding gaan doen op het mbo.
Voor leerlingen die naar havo 4 gaan, is onderscheid gemaakt tussen leerlingen die wiskunde A gaan volgen en degenen die wiskunde B gaan volgen.

| doelgroep | hoofdstukken |
|---|---|
| havo wiskunde A | 1, 2, 3 |
| havo wiskunde B | 2 tot en met 9 |
| mbo-techniek | 2, 3, 4, 6, 8, 10 |

Bij de hoofdstukken die niet voor alle drie de doelgroepen zijn bedoeld, staat dit ook aan het begin van het hoofdstuk duidelijk aangegeven.
De hoofdstukken en de daarin opgenomen leerstof is zo opgebouwd, dat de hoofdstukken in de aangegeven volgorde moeten worden doorgewerkt.
Hieronder is aangegeven met hoeveel uren studielast bij de drie doelgroepen rekening moet worden gehouden bij het doornemen van de hoofdstukken.

- Voor havo wiskunde A  $4 + 7 + 3 = 14$ klokuren.
- Voor havo wiskunde B  $7 + 3 + 2 + 2 + 4 + 3 + 2 + 3 = 26$ klokuren.
- Voor mbo-techniek  $7 + 3 + 2 + 4 + 2 + 2 = 20$ klokuren.

**Zelfstandig doorwerken of onder begeleiding**

Het boek kan in principe zelfstandig door de leerlingen worden doorgewerkt.
Daartoe zijn veel voorbeelden opgenomen en is bij de opgaven een voorzichtige opbouw gekozen. Bovendien zijn achter in het boek van alle opgaven de uitwerkingen opgenomen.
Verder is gebruikgemaakt van de mogelijkheden die het flexboek biedt. Zo zijn er na enkele voorbeelden invulopgaven opgenomen waarin de leerlingen precies de uitwerking van het voorbeeld kunnen volgen.
De ervaring leert dat het voor veel leerlingen lastig is om de hoofdstukken geheel zelfstandig door te nemen. Het is dan ook verstandig voor enige begeleiding te zorgen.

Opmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

*Voorjaar 2021*

# Inhoud

# 1 [HAVO-A] Procenten

Tot nu toe heb je bij het berekenen van procenten gebruikgemaakt van een procententabel. Op de havo worden procentenberekeningen anders gedaan. In dit hoofdstuk leer je die manier.

## Theorie A De vermenigvuldigingsfactor

52% van een getal is $\frac{52}{100}$ deel van dat getal.

Je kunt in plaats van $\frac{52}{100}$ ook schrijven 0,52.
Om te berekenen hoeveel 52% van 420 is, bereken je dus
$\frac{52}{100} \times 420 = 0{,}52 \times 420$.
We noemen 0,52 de **vermenigvuldigingsfactor**. Je kunt de vermenigvuldigingsfactor gebruiken om procentberekeningen te maken.

Bij 31% van 2348,6 krijg je $0{,}31 \times 2348{,}6 = 728{,}066$.
Afgerond op één decimaal krijg je 728,1.
We schrijven $0{,}31 \times 2348{,}6 \approx 728{,}1$.

Met ≈ laat je zien dat er is afgerond.
Je spreekt ≈ uit als *is ongeveer gelijk aan*.

### Voorbeeld

**a** Bereken 32% van 698,6. Rond af op één decimaal.
**b** Bereken 268% van €456,92.

*Uitwerking*

**a** $0{,}32 \times 698{,}6 \approx 223{,}6$ **b** $2{,}68 \times 456{,}92 \approx$ € 1224,55

**1** Vul in. Rond af op één decimaal.

**a** 49% van 369,5 is ………… × ………… ≈ …………

**b** 121% van 89,23 is ………… × ………… ≈ …………

**c** 34% van 921 is ………… × ………… ≈ …………

**2** Bereken.

**a** 89% van €59,92
**b** 143% van €89,98
**c** 0,45% van €598,20
**d** 0,5% van €2346,99

## Theorie B Toename en afname met de vermenigvuldigingsfactor

Neemt een prijs met 12% toe, dan krijg je $\underbrace{100\%}_{\text{oude prijs}} + \underbrace{12\%}_{\text{toename}} = \underbrace{112\%}_{\text{nieuwe prijs}}$, dus × 1,12.

De nieuwe prijs kun je berekenen met NIEUW = 1,12 × OUD.
Het getal 1,12 heet de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele toename van 12%.
En zo is bij een procentuele toename van 8,7%, de vermenigvuldigingsfactor 1,087.

Neemt een hoeveelheid met 16% af, dan houd je 100% − 16% = 84% over, dus × 0,84.
De nieuwe hoeveelheid bereken je met NIEUW = 0,84 × OUD.

### Voorbeeld

**a** Een hoeveelheid van 325 neemt met 8% toe.
Hoeveel krijg je?

**b** Op een horloge van € 134,95 krijg je 7,5% korting.
Bereken de nieuwe prijs.

*Uitwerking*

**a** Je krijgt 1,08 × 325 = 351.
100% + 8% = 108%, dus × 1,08

**b** De nieuwe prijs is 0,925 × 134,95 ≈ € 124,83.
100% − 7,5% = 92,5%, dus × 0,925

**3** Vul in.

**a** Bij een toename van 5,8% hoort de vermenigvuldigingsfactor ..................

**b** Bij een afname van 12,5% hoort de vermenigvuldigingsfactor ..................

**c** Bij een toename van een hoeveelheid van 750 met 12%

krijg je .................. × .................. = ..................

**d** Bij een afname van een hoeveelheid van 550 met 16%

krijg je .................. × .................. = ..................

**4** Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele

- **a** toename van 6%
- **b** afname van 65%
- **c** afname van 1,25%
- **d** toename van 120,1%
- **e** toename van 0,35%
- **f** afname van 10,5%

**5** De prijs van een fototoestel van € 385,95 wordt verlaagd met 13,5%.
Bereken de nieuwe prijs.

**6** Martijn koopt een huis van € 249 500. Een jaar later is de waarde van het huis met 11,5% gestegen.
Hoeveel is het huis een jaar na de aankoop waard?

### Door elkaar

**7**
- **a** Hoeveel is 5,9% van 50?
- **b** Op een ring van € 29,95 krijg je 7,9% korting.
  Bereken de nieuwe prijs.
- **c** Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een toename van 4,7%.
- **d** Een hoeveelheid van 1600 neemt met 3,5% af.
  Hoeveel houd je over?

## Theorie C Percentage berekenen

In een klas van 27 leerlingen hebben 24 leerlingen een voldoende gehaald voor het proefwerk wiskunde.

24 van de 27 is $\frac{24}{27} \times 100\% \approx 88{,}9\%$.
Dus 88,9% van de leerlingen heeft een voldoende gehaald.

**Afspraak: Percentages rond je af op één decimaal.**

### Voorbeeld

- **a** Hoeveel procent is 45 van 679?
- **b** Hoeveel procent is 5371 van 7212?

*Uitwerking*

a $\frac{45}{679} \times 100\% \approx 6{,}6\%$

b $\frac{5371}{7212} \times 100\% \approx 74{,}5\%$

**8** Vul in.
- **a** 5 van 25 is $\frac{5}{\ldots}$ × 100% = ........ %.
- **b** 821 van 5390 is $\frac{\ldots}{\ldots}$ × 100% ≈ ........ %.

**9** Hoeveel procent is
**a** 0,3 van 2
**b** 4,9 van 34,3
**c** 1 van 9,3
**d** 5,42 van 89,23

**10** Bij een voetbalwedstrijd zitten 1238 mannen en 324 vrouwen op de tribune.
**a** Hoeveel publiek zit er in totaal op de tribune?
**b** Hoeveel procent van het publiek is vrouw?

Let op het verschil

| Hoeveel is 28% van 390? | Hoeveel procent is 28 van 390? |
| --- | --- |
| 28% van 390 is $0{,}28 \times 390 = 109{,}2$. | 28 van 390 is $\frac{28}{390} \times 100\% \approx 7{,}2\%$. |

**11** **a** Hoeveel procent is 97 van 218?
**b** Hoeveel is 43% van 18 500?
**c** Hoeveel is 0,3% van €692,55?

**12** **a** Hoeveel is 245% van 295?
**b** Hoeveel procent is €234,98 van €975,39?
**c** Hoeveel is 2,9% van €21 653?

**13** In klas M4a zitten 28 leerlingen. Er komen 18 leerlingen op de fiets naar school, 3 met de bus en 5 met de trein. De rest komt lopend.
**a** Hoeveel procent komt met de fiets naar school?
**b** Hoeveel procent komt met het openbaar vervoer?

### Door elkaar

**14** **a** Een bedrag van €296 neemt met 41% toe.
Hoeveel is het bedrag nu?
**b** Hoeveel procent is 45 van de 1269?
**c** Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een afname van 21,3%.
**d** In klas 4B dragen 6 van de 27 leerlingen een bril.
Hoeveel procent is dat?
**e** Bereken 62% van €829,45.
**f** Een huis van €267 500 is 6,2% in waarde gestegen.
Hoeveel is het huis waard?
**g** Een webshop had 1240 artikelen in het assortiment. Dit aantal wordt met 25% uitgebreid.
Hoeveel artikelen heeft de webshop nu in het assortiment?

## Theorie D Procentuele verandering berekenen

Op een school zitten 1150 leerlingen. Vorig jaar waren dat er 1085.
De **absolute toename** van het aantal leerlingen is 1150 − 1085.

De **procentuele toename** is $\frac{1150 - 1085}{1085} \times 100\% \approx 6{,}0\%$.

Je vergelijkt met het oude aantal leerlingen, dus je deelt door OUD.

**procentuele verandering =** $\frac{\textbf{NIEUW} - \textbf{OUD}}{\textbf{OUD}} \times \mathbf{100\%}$

Bij een **procentuele afname** geeft deze formule een negatieve uitkomst.
Een trui van 59 euro wordt afgeprijsd naar 45 euro.

De procentuele verandering is $\frac{45 - 59}{59} \times 100\% \approx -23{,}7\%$.

Aan het minteken zie je dat er een afname is. Conclusie: de procentuele afname is 23,7%.

### Voorbeeld

**a** Een hoeveelheid neemt toe van 129 naar 138.
Bereken de procentuele toename.

**b** Een ketting van €49,95 kost in de opruiming €35.
Hoeveel procent is de korting?

*Uitwerking*

**a** OUD = 129 en NIEUW = 138.

$\frac{138 - 129}{129} \times 100\% \approx 7{,}0\%$, dus de procentuele toename is 7,0%.

**b** OUD = 49,95 en NIEUW = 35.

$\frac{35 - 49{,}95}{49{,}95} \times 100\% \approx -29{,}9\%$, dus de korting is 29,9%.

**15** Vul in.

**a** Een hoeveelheid neemt toe van 560 naar 620.

OUD = ........ en NIEUW = ........

$\frac{\dots - \dots}{\dots} \times 100\% \approx$ ........, dus de procentuele ........

is ........

**b** Een hoeveelheid neemt af van 380 naar 300.
OUD = ............ en NIEUW = ............

$\frac{\dots\dots - \dots\dots}{\dots\dots}$ × 100% ≈ ............, dus de procentuele ............ is ............

**16** **a** Een hoeveelheid neemt toe van 18 naar 20,5.
Bereken de procentuele toename.
**b** Een hoeveelheid neemt af van 412 naar 368.
Bereken de procentuele afname.
**c** Een hoeveelheid neemt toe van 0,075 naar 0,092.
Bereken de procentuele toename.
**d** Een hoeveelheid neemt af van 5,12 naar 4,56.
Bereken de procentuele afname.

**17** Een rekenmachine van €21,99 wordt in prijs verhoogd en kost nu €23,95.
Vul in.
OUD = ............ en NIEUW = ............

$\frac{\dots\dots - \dots\dots}{\dots\dots}$ × 100% ≈ ............, dus de rekenmachine is ............ % duurder geworden.

**18** Een auto is in prijs verlaagd van €12 345 naar €10 846.
Vul in.
OUD = ............ en NIEUW = ............

$\frac{\dots\dots - \dots\dots}{\dots\dots}$ × 100% ≈ ............, dus de auto is ............ % goedkoper geworden.

**19** Bereken telkens de procentuele toename of afname.
**a** Een scooter is in prijs verlaagd van €1200 naar €1059.
**b** Het aantal leerlingen op een school is gedaald van 1379 naar 1212.
**c** Een zonnebril van 45 euro kost in de opruiming 32 euro.
**d** Een kaartje voor de dierentuin van €28,50 wordt één euro duurder.

## Door elkaar

**20** **a** Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een afname van 23%.
**b** Hoeveel procent is 85 van de 429?
**c** Een hoeveelheid neemt van 28 toe naar 29,5.
Bereken de procentuele toename.
**d** Op een school zit 12% van de 1250 leerlingen in havo 4.
Hoeveel leerlingen zitten in havo 4?
**e** In een klas van 31 leerlingen hebben 12 leerlingen een scooter.
Hoeveel procent heeft een scooter?
**f** Een hoeveelheid neemt af van 933 naar 859.
Bereken de procentuele afname.

## Theorie E  OUD berekenen bij procentuele toe- of afname

Een fiets wordt 12% duurder. De nieuwe prijs is 588 euro.
Om de oude prijs te berekenen, bedenk je dat
NIEUW = 1,12 × OUD, dus 588 = 1,12 × OUD.
Je kunt ook zeggen 1,12 × OUD = 588. Deze vergelijking kun je oplossen.

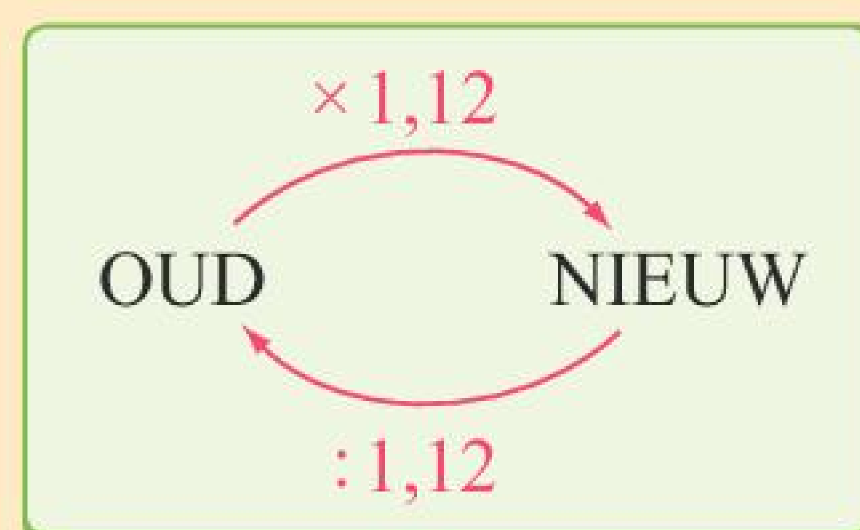
1,12 × OUD = 588
: 1,12       : 1,12

OUD = $\frac{588}{1,12}$ = 525, dus de fiets kostte 525 euro.
Let goed op het verschil tussen de volgende berekeningen.

**Procentuele toename van 12%**
**Je weet OUD.**
Je krijgt NIEUW met NIEUW = 1,12 × OUD.

**Je weet NIEUW.**

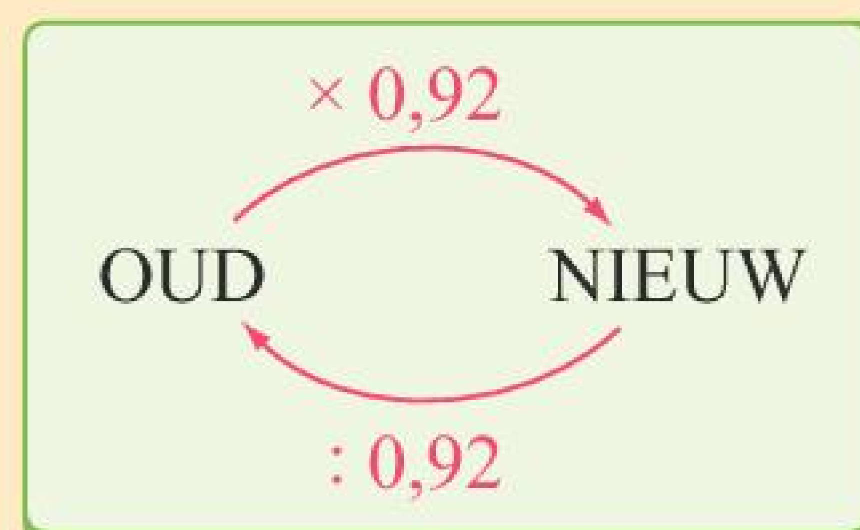
Je krijgt OUD met OUD = $\frac{\text{NIEUW}}{1,12}$.




**Procentuele afname van 8%**
**Je weet OUD.**
Je krijgt NIEUW met NIEUW = 0,92 × OUD.

**Je weet NIEUW.**

Je krijgt OUD met OUD = $\frac{\text{NIEUW}}{0,92}$.




### Voorbeeld

**a** Een hoeveelheid neemt met 40% af tot 56.
Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond af op gehelen.

**b** Een televisie wordt 7,5% duurder en kost nu 789 euro.
Bereken de oude prijs.

*Uitwerking*

**a** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{56}{0,6} \approx 93$. 40% afname, dus delen door 0,6.

**b** De oude prijs is $\frac{789}{1,075} \approx$ € 733,95. 7,5% duurder, dus delen door 1,075.

**21** Vul in. Rond de antwoorden af op gehelen.

**a** Een hoeveelheid neemt met 12% toe tot 550.

12% toename, dus delen door ..................

De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{\dots}{\dots} \approx$ ..................

**b** Een hoeveelheid neemt met 16% af tot 340.

16% afname, dus delen door ..................

De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{\dots}{\dots} \approx$ ..................

**22** Rond de antwoorden af op gehelen.

**a** Een hoeveelheid neemt met 7% toe tot 380.
Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid.

**b** Een hoeveelheid neemt met 9% af tot 185.
Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid.

**c** Een hoeveelheid neemt met 18% af. Er blijft 250 over.
Hoeveel was er eerst?

**23** **a** Een artikel wordt 5% duurder en kost nu € 23.
Bereken de oude prijs.

**b** Het aantal leerlingen in de brugklas is met 9,8% afgenomen ten opzichte van vorig jaar. Nu zitten er 230 leerlingen in de brugklas.
Hoeveel leerlingen zaten er vorig jaar in de brugklas?

**c** In 2020 heeft bouwbedrijf Grootten 3028 woningen gebouwd.
Dat is 3,8% meer dan in 2019.
Hoeveel woningen heeft Grootten in 2019 gebouwd?

## Door elkaar

**24** **a** Een artikel van € 25 wordt 8% duurder.
Bereken de nieuwe prijs.

**b** Een laptop wordt 14% in prijs verlaagd en kost nu € 823.
Bereken de prijs voor de prijsdaling.

**c** Op een school zijn 162 docenten. Hiervan is 14% ouder dan 60 jaar.
Hoeveel docenten zijn ouder dan 60 jaar?

**d** Een hoeveelheid neemt af van 933 naar 859.
Bereken de procentuele afname.

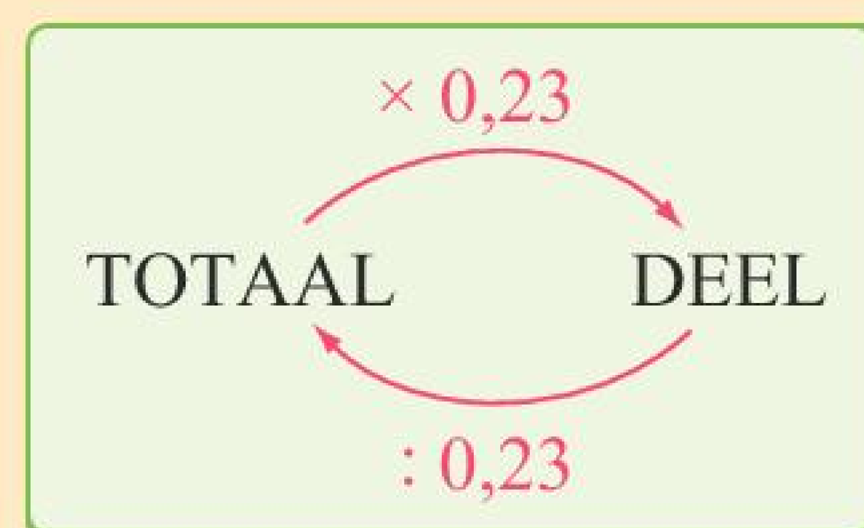
**e** Een hoeveelheid neemt met 15% af naar 23.
Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond af op gehelen.

## Theorie F Van DEEL naar TOTAAL

Op een school komen 424 leerlingen met het openbaar vervoer naar school. Dat is 23% van alle leerlingen.
Om het totale aantal leerlingen te berekenen, gebruik je 23% van het TOTAAL is 424, dus 0,23 × TOTAAL = 424.

Dit geeft TOTAAL = $\frac{424}{0,23} \approx 1843$.

**Een DEEL is 23% van het TOTAAL.**
**Je weet TOTAAL.**
Je krijgt DEEL met DEEL = 0,23 × TOTAAL.




**Je weet DEEL.**

Je krijgt TOTAAL met TOTAAL = $\frac{\text{DEEL}}{0,23}$.

### Voorbeeld

**a** Van een hoeveelheid is 17% van het totaal gelijk aan 84.
Bereken de totale hoeveelheid. Rond af op gehelen.

**b** In klas 4M1 dragen 6 leerlingen een bril. Dat is 24% van alle leerlingen.
Hoeveel leerlingen zitten in de klas?

*Uitwerking*

**a** De totale hoeveelheid is $\frac{84}{0,17} \approx 494$.
17% is gelijk aan 84, dus delen door 0,17.

**b** In de klas zitten $\frac{6}{0,24} = 25$ leerlingen.
24% is gelijk aan 6, dus delen door 0,24.

**25** Vul in en rond de antwoorden af op gehelen.

**a** Van een hoeveelheid is 43% van het totaal gelijk aan 750.

43% is gelijk aan 750, dus delen door ..........

Het totaal is $\frac{\ldots}{\ldots} \approx$ ..........

**b** Van een hoeveelheid is 21,2% van het totaal gelijk aan 489.

21,2% is gelijk aan 489, dus delen door ..........

Het totaal is $\frac{\ldots}{\ldots} \approx$ ..........

**26** Rond de antwoorden af op gehelen.
- **a** Van een hoeveelheid is 9,5% van het totaal gelijk aan 715.
  Bereken de totale hoeveelheid.
- **b** Van een hoeveelheid is 35,8% van het totaal gelijk aan 673.
  Bereken de totale hoeveelheid.

**27**
- **a** Van alle vierdeklassers komt 78,2% met de fiets naar school.
  Dat zijn 178 leerlingen.
  Hoeveel vierdeklassers zijn er?
- **b** De huurprijs van een woning gaat met €32,45 per maand omhoog. Dat is een stijging van 3,9%.
  Bereken de oude huurprijs.

## Door elkaar

**28**
- **a** Bereken 5,7% van 132.
- **b** Van een hoeveelheid is 5,7% van het totaal gelijk aan 132.
  Bereken de totale hoeveelheid.
- **c** Een fiets wordt 7,5% duurder en kost nu €899.
  Bereken de oude prijs.
- **d** Hoeveel procent is 87,3 van 2694,8?
- **e** Van een sportschool is 20,3% van de leden jonger dan 16 jaar.
  Dat zijn 49 leden.
  Hoeveel leden heeft de sportschool?

**29**
- **a** Op een school zijn 32 van de 85 docenten jonger dan 40 jaar.
  Hoeveel procent van de docenten is jonger dan 40 jaar?
- **b** Een hoeveelheid neemt af van 13,7 naar 12,4.
  Bereken de procentuele afname.
- **c** Een hoeveelheid neemt met 8,5% toe tot 13,7.
  Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond af op één decimaal.
- **d** De afgelopen zomer gingen 1 290 000 Nederlanders kamperen in Frankrijk. Dat was 53,8% van alle Nederlanders die in het buitenland kampeerden.
  Hoeveel Nederlanders kozen afgelopen zomer voor een kampeervakantie in het buitenland? Rond af op duizendtallen.
- **e** Het aantal leerlingen van een basisschool is met 11,6% afgenomen ten opzichte van vorig jaar. Er zaten vorig jaar 118 leerlingen op de basisschool.
  Hoeveel leerlingen zitten er dit jaar op de basisschool?
- **f** Dit jaar zijn er 28 meer jongeren lid van de tennisclub dan vorig jaar. Dat is een toename van 22%.
  Hoeveel jongeren zijn dit jaar lid van de tennisclub?

# 2 Algebra deel 1

## 2.1 Herleiden

### Theorie A Som van gelijke termen

Bij de optelling $3 + 4 + 5 = 12$ zijn de getallen 3, 4 en 5 de **termen**. De uitkomst 12 noemen we de **som**.
Je weet dat $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

$5 \cdot 4$ betekent $5 \times 4$

Met letters gaat het net zo.
$a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$

$\underbrace{a + a + a + a + a}_{\text{som van vijf gelijke termen}} = \underbrace{5a}_{\text{product van twee factoren}}$

Bij de vermenigvuldiging $3 \cdot 6 = 18$ zijn de getallen 3 en 6 de **factoren**.
De uitkomst 18 noemen we het **product**.

$5a$ is het product van 5 en $a$.
$5a$ is dus een product van twee factoren.

**1** Schrijf als een product van twee factoren.

**a** $p + p + p =$ ..........

**b** $x + x + x + x =$ ..........

**c** $a + a + a + a + a + a + a =$ ..........

**2** Schrijf als som.

**a** $5a =$ ..........

**b** $4b =$ ..........

**c** $7p =$ ..........

## Theorie B Het herleiden van producten

Je kunt $2 \cdot 8b$ eenvoudiger schrijven, want
$2 \cdot 8b = 2 \cdot 8 \cdot b = 16b$.
We zeggen dat je $2 \cdot 8b$ kunt **herleiden** tot $16b$.

herleiden
=
eenvoudiger schrijven

Een speciaal geval heb je bij $5a \cdot 4a$.
Zoals $6 \cdot 6 = 6^2$, zo is $a \cdot a = a^2$.
Dus $5a \cdot 4a = 20a \cdot a = 20a^2$.

Het kwadraat van $a$ is $a^2$.
Het dubbele van $a$ is $2a$.

**Producten herleid je zo:**

1. Vermenigvuldig de getallen en zet ze voorop.
2. Zet de letters er in alfabetische volgorde achter en laat alle vermenigvuldigingspunten weg.

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $-4x \cdot -3y$
**b** $n \cdot -10k \cdot 2m$
**c** $6a \cdot -5a$

*Uitwerking*

**a** $-4x \cdot -3y = 12xy$ — eerst $-4 \cdot -3 = 12$, dan $xy$
**b** $n \cdot -10k \cdot 2m = -20kmn$ — eerst $1 \cdot -10 \cdot 2 = -20$, dan $n$, $k$ en $m$ alfabetisch
**c** $6a \cdot -5a = -30a^2$ — eerst $6 \cdot -5 = -30$, dan $a \cdot a = a^2$

**3** Herleid.

**a** $15a \cdot 3b =$ ……………
**b** $25p \cdot -3q =$ ……………
**c** $-7b \cdot 7a =$ ……………
**d** $-2p \cdot -15q =$ ……………
**e** $x \cdot -5 =$ ……………
**f** $-k \cdot -l =$ ……………

**4** Herleid.

**a** $8x \cdot y \cdot 4z =$ ……………
**b** $-3b \cdot -a \cdot 3a =$ ……………
**c** $-2a \cdot -8b \cdot -5 =$ ……………
**d** $5k \cdot 3l \cdot -m =$ ……………
**e** $18y \cdot 0 \cdot -2x =$ ……………
**f** $-ac \cdot -8b =$ ……………

## Theorie C Gelijksoortige termen

Van de som $3a + 4a$ zijn $3a$ en $4a$ de termen.
In deze termen komt dezelfde letter voor.
Zulke termen heten **gelijksoortige termen**.
In de optelling $4b + 7b$ zijn $4b$ en $7b$ gelijksoortige termen.
Gelijksoortige termen kun je samennemen.

$$4b + 7b = \underbrace{b + b + b + b}_{4b} + \underbrace{b + b + b + b + b + b + b}_{7b} = 11b$$

In de optelling $3ab + 4ab$ zijn $3ab$ en $4ab$ gelijksoortige termen. Ook deze termen kun je samennemen.

$$3ab + 4ab = \underbrace{ab + ab + ab}_{3ab} + \underbrace{ab + ab + ab + ab}_{4ab} = 7ab$$

Bij aftrekken gaat het net zo.

$$6b - 2b = \underbrace{b + b + b + b + b + b}_{6b} \underbrace{- b - b}_{-2b} = 4b$$

Hiermee is $6b - 2b$ herleid tot $4b$.
Je schrijft zulke herleidingen *zonder tussenstap* op.

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $15a + 7a$
**b** $ab + 9ab$
**c** $20kl - 19kl$
**d** $3b - 3b$

*Uitwerking*

**a** $15a + 7a = 22a$
**b** $ab + 9ab = 10ab$
**c** $20kl - 19kl = kl$ $\quad 1kl = kl$
**d** $3b - 3b = 0$ $\quad 0b = 0$

**5** Herleid.

**a** $6a + 11a =$ ..................
**b** $-22c + 21c =$ ..................
**c** $-96x + 4x =$ ..................
**d** $19y - y =$ ..................
**e** $2q - 4q =$ ..................
**f** $kl + kl =$ ..................
**g** $-ab + ab =$ ..................
**h** $x - 3x + 7x =$ ..................
**i** $y + 2y + 3y =$ ..................
**j** $18z - 2z + z =$ ..................

### Door elkaar

**6** Herleid.

**a** $5b \cdot -5c =$ ..................

**b** $5a + 11a =$ ..................

**c** $8y \cdot 0 \cdot 5z =$ ..................

**d** $-8b \cdot 5b \cdot -5 =$ ..................

**e** $k + 3k + 5k =$ ..................

**f** $-a \cdot -c =$ ..................

## Theorie D **Niet gelijksoortige termen**

In de som $2a + 6a$ zijn de termen $2a$ en $6a$ gelijksoortig.
In de som $2a + 6b$ zijn de termen $2a$ en $6b$ *niet* gelijksoortig.
Zo'n som kun je niet herleiden.
Dus $2a + 6a$ kun je wel samennemen, maar $2a + 6b$ niet.
Ook $12ab + 7bc$ kun je niet samennemen, want $12ab$ en $7bc$ zijn niet gelijksoortig.
In gelijksoortige termen komen precies dezelfde letters voor.
Alleen gelijksoortige termen kun je samennemen.

### Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $8p + 7p$

**b** $6ab - ab$

**c** $8a + 3d$

**d** $2x - x$

**e** $7a - 7a$

**f** $9a + 1$

*Uitwerking*

a $8p + 7p = 15p$

b $6ab - ab = 5ab$

c $8a + 3d$ kan niet

d $2x - x = x$

e $7a - 7a = 0$

f $9a + 1$ kan niet

**7** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $3a + 10a$ ..................

**b** $3a + 10b$ ..................

**c** $8b - b$ ..................

**d** $3p + 11$ ..................

**e** $ac - 6ac$ ..................

**f** $2xy + 8xy$ ..................

**g** $6p + 6p$ ..................

**h** $6a - 6b$ ..................

**i** $3a - 3a$ ..................

**j** $ab + bc$ ..................

**k** $18ab + 6ac$ ..................

**l** $8p - 7p$ ..................

**m** $4q + 4p$ ..................

**n** $5b - 3a$ ..................

**Door elkaar**

**8** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $5a \cdot 12a$ ..................

**b** $a + 4b$ ..................

**c** $5x \cdot 7xy$ ..................

**d** $3ab + 5bc$ ..................

**e** $12ac \cdot 6a$ ..................

**f** $8p - 8p$ ..................

**g** $q + 4p$ ..................

**h** $5 - 3a$ ..................

**i** $15a + 12a$ ..................

**j** $16ab - 16$ ..................

**k** $a \cdot 4b$ ..................

**l** $7xy + 4x$ ..................

**m** $3ab - ab$ ..................

**n** $12a \cdot 6a$ ..................

**o** $8p - 3q$ ..................

**p** $5pq + 9pq$ ..................

**9** Vul in.

**a** $17a = 7a +$ ..................

**b** $-24ac = 12a \cdot$ ..................

**c** $45x = 5x +$ ..................

**d** $20p = 55p -$ ..................

**e** $25xy = x \cdot$ ..................

**f** $14klm = 7$ .......... $+$ ..........

**g** $27ab = 9a \cdot$ ..................

**h** $4xy = 16xy -$ ..................

# 2.2 Haakjes wegwerken

## Theorie A De regel $a(b + c) = ab + ac$

Alyssa koopt voor elk van haar vier kinderen een ijsje en een zakje chips.
Een ijsje kost € 1,50 en een zakje chips € 0,50.
Ze kan op twee manieren berekenen hoeveel ze moet betalen.
Of $4 \cdot (1{,}50 + 0{,}50)$ of $4 \cdot 1{,}50 + 4 \cdot 0{,}50$.
De uitkomst is in beide gevallen gelijk, dus
$4 \cdot (1{,}50 + 0{,}50) = 4 \cdot 1{,}50 + 4 \cdot 0{,}50$.
$4 \cdot (1{,}50 + 0{,}50)$ is van de vorm $4 \cdot (a + b)$, dus $4 \cdot (a + b) = 4 \cdot a + 4 \cdot b$.

Bij $4(a + b)$ kun je de termen $a$ en $b$ niet samennemen. Toch kun je $4(a + b)$ herleiden door middel van **haakjes wegwerken**. Je krijgt

$4(a + b) = 4a + 4b$

$4 \cdot a$ $4 \cdot b$

$4(a + b)$ betekent $4 \cdot (a + b)$.

Voor het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regel.
$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$

### Voorbeeld

Werk de haakjes weg.

**a** $2(4a + 3b)$ **b** $5(p + 3)$ **c** $2a(8 + 3b)$

*Uitwerking*

**a** $2(4a + 3b) = 8a + 6b$
**b** $5(p + 3) = 5p + 15$
**c** $2a(8 + 3b) = 16a + 6ab$

**10** Werk de haakjes weg.

**a** $5(a + c) =$ ..........
**b** $8(2a + b) =$ ..........
**c** $a(3b + c) =$ ..........
**d** $x(2y + 3) =$ ..........
**e** $5a(2b + c) =$ ..........
**f** $3p(x + 3) =$ ..........
**g** $4a(b + \frac{1}{2}) =$ ..........
**h** $3c(a + 1) =$ ..........

## Theorie B Haakjes wegwerken als er mintekens voorkomen

Je kunt ook haakjes wegwerken als er mintekens staan.

$5(a - b) = 5a - 5b$

$-8(p - 3q) = -8p - -24q = -8p + 24q$

Je mag in het vervolg de tussenstap weglaten.
Zo is $-3(2m + 4n) = -6m - 12n$.

### Voorbeeld

Werk de haakjes weg.

**a** $-5(a + 3b)$
**b** $2b(a - 3)$
**c** $-(x - 3y)$

*Uitwerking*

**a** $-5(a + 3b) = -5a - 15b$
**b** $2b(a - 3) = 2ab - 6b$
**c** $-(x - 3y) = -x + 3y$

**11** Werk de haakjes weg.

**a** $-4(x + 2y) =$ ..............................
**b** $4(x - 2y) =$ ..............................
**c** $-4(x - 3) =$ ..............................
**d** $-4(2x + 8) =$ ..............................
**e** $-3a(2b + c) =$ ..............................
**f** $5a(3b - c) =$ ..............................
**g** $-2p(3q - 1) =$ ..............................
**h** $5q(2p + 8) =$ ..............................

## Theorie C Haakjes wegwerken en herleiden

Bij het wegwerken van de haakjes bij $3(a - 2b) - 4(2a + b)$ heb je te maken met de twee stukken.

- $3(a - 2b) = 3a - 6b$
- $-4(2a + b) = -8a - 4b$

Dus $3(a - 2b) - 4(2a + b) = 3a - 6b - 8a - 4b = -5a - 10b$.

En zo is
$-3(3p + 5q) - 2(4p - 3q) = -9p - 15q - 8p + 6q = -17p - 9q$.

## Voorbeeld

Herleid.

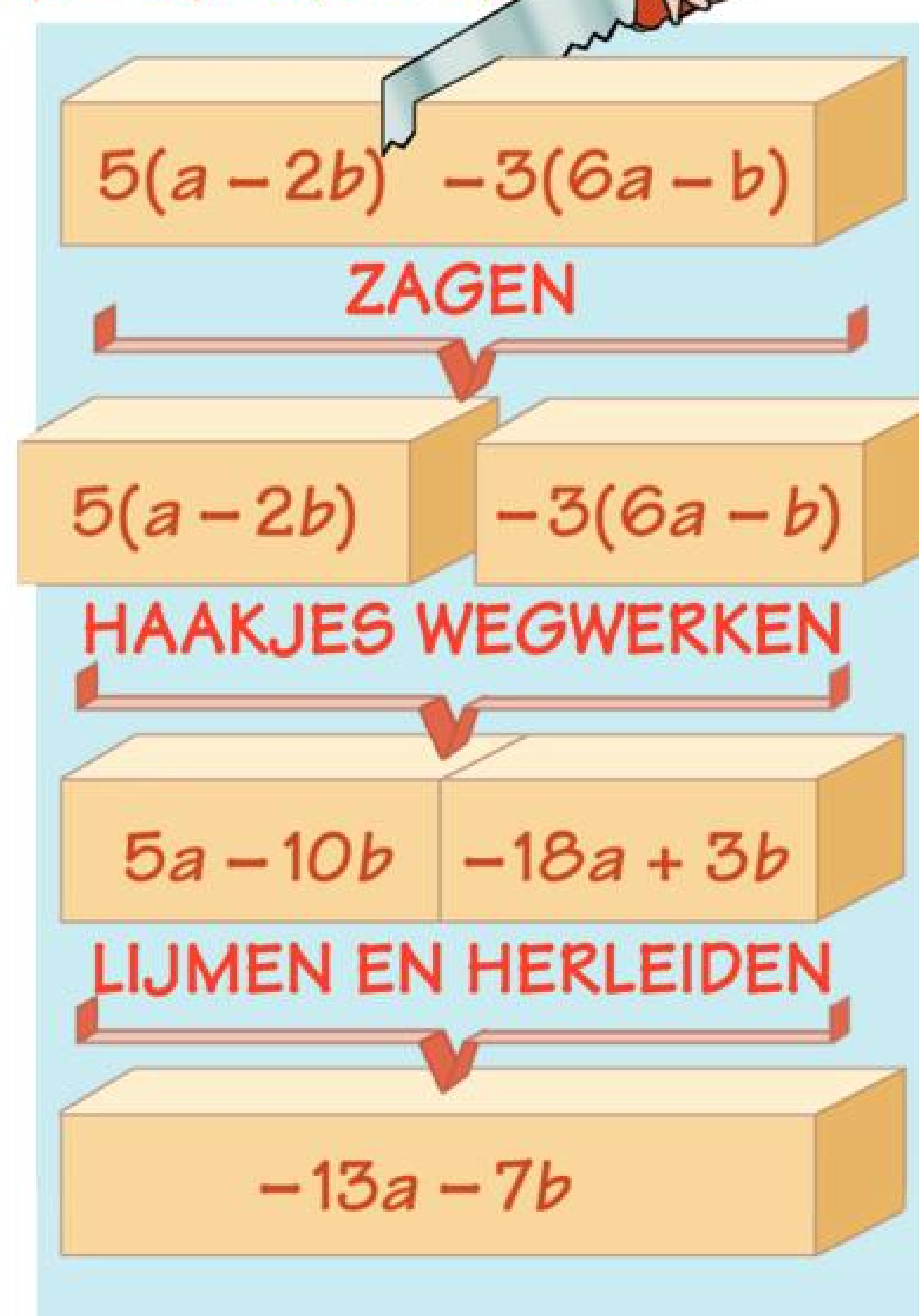
**a** $3(a - 2b) - 5(a + b)$
**b** $-3(x - 2) + 5x$
**c** $5 - (a + 5)$

*Uitwerking*

**a** $3(a - 2b) - 5(a + b) = 3a - 6b - 5a - 5b = -2a - 11b$
**b** $-3(x - 2) + 5x = -3x + 6 + 5x = 2x + 6$
**c** $5 - (a + 5) = 5 - a - 5 = -a$

**12** Herleid.

**a** $3(a + 2b) - 6a$
**b** $-5(a - 2b) + 6a$
**c** $5(a - 2b) + 3(2a - b)$
**d** $8(a - b) - 5(a - 3)$
**e** $2a - (5 + 2a)$
**f** $-3(a - 1) - 3a$




### Door elkaar

**13** Herleid.

**a** $3a - 2(a + 6)$
**b** $5a(c + 2)$
**c** $3 + a - 2(a + 6)$
**d** $8p(2r + s)$
**e** $3(a - 1) - (a - 8)$
**f** $-(2x - 3)$
**g** $4(a - 1) - 2a + 8$
**h** $-4(x - 2y) - x(y - 3)$
**i** $-b(2 - a) + b - ab$
**j** $-5(-3p + q)$

## Theorie D De regel $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

De optelling $x + 4$ bestaat uit twee termen. Dit heet ook wel een **tweeterm**.
Ook $y + 7$ is een tweeterm. Bij het vermenigvuldigen van twee tweetermen heb je te maken met haakjes. Deze werk je als volgt weg.

$(x + 4)(y + 7) = xy + 7x + 4y + 28$

$(x + 4)(y + 7)$ betekent $(x + 4) \cdot (y + 7)$

Voor het vermenigvuldigen van twee tweetermen gebruik je de volgende regel.

$\boldsymbol{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $(x + 2)(x + 10)$
**b** $(p - 3)(p + 7)$
**c** $(b - 5)(c - 12)$

*Uitwerking*

**a** $(x + 2)(x + 10) = x^2 + 10x + 2x + 20 = x^2 + 12x + 20$
**b** $(p - 3)(p + 7) = p^2 + 7p - 3p - 21 = p^2 + 4p - 21$
**c** $(b - 5)(c - 12) = bc - 12b - 5c + 60$

**14** Herleid.

**a** $(p + 5)(q + 4)$
**b** $(x + 12)(y + 2)$
**c** $(a + 3)(a + 8)$
**d** $(b + 15)(b + 3)$
**e** $(x + 4)(x + 3)$
**f** $(a + 2)(a + 30)$

### Door elkaar

**15** Herleid.

**a** $5(a + 5) - 6$
**b** $(x + 5)(x - 2)$
**c** $-6(4a + 8) + 3$
**d** $(y + 4)(y - 7)$
**e** $3x - 2y + x(y - 5)$
**f** $3(a + 7) - 9$
**g** $(x + 3)(x - 1)$
**h** $-2(3a + 8) - 3a$

# 2.3 Letterrekenen met breuken

## Theorie A Gelijknamige breuken optellen en aftrekken

In de breuk $\frac{3}{7}$ is 3 de teller en 7 de noemer.

Bij de breuken $\frac{3}{7}$ en $\frac{2}{7}$ zijn de noemers gelijk.

Daarom zijn deze breuken **gelijknamig**.

Ook $\frac{3}{10}$ en $\frac{7}{10}$ zijn gelijknamig.

Gelijknamige breuken kun je direct optellen.

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ ......... $3 + 2$

Je telt de tellers op. De noemer verandert niet.
Soms kun je na het optellen nog vereenvoudigen.
Bij breuken aftrekken gaat het op dezelfde manier.

$\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer : 2)

### Voorbeeld

Bereken.

**a** $\frac{7}{20} + \frac{3}{20}$

**b** $\frac{2}{15} - \frac{8}{15}$

*Uitwerking*

**a** $\frac{7}{20} + \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

**b** $\frac{2}{15} - \frac{8}{15} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

**16** Bereken en vul in.

**a** $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$ ..........

**b** $\frac{4}{10} - \frac{3}{10} =$ ..........

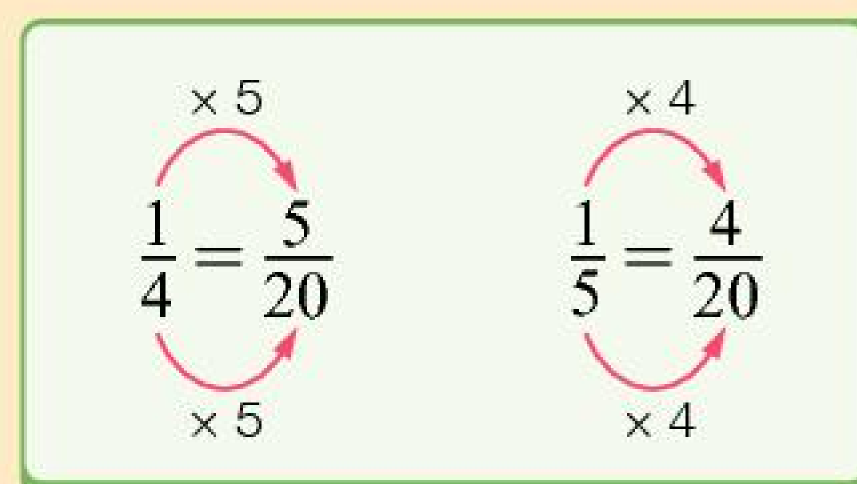
**c** $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} =$ ..........

**d** $\frac{2}{15} - \frac{7}{15} =$ ..........

**e** $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} =$ ..........

**f** $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ ..........

## Theorie B Niet-gelijknamige breuken optellen




Bij de breuken $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ zijn de noemers niet gelijk.

De breuken $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ zijn **niet-gelijknamig**.
Om ze op te tellen, maak je de breuken eerst gelijknamig.
Je krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$.
De nieuwe noemer 20 krijg je door de noemers 4 en 5 met elkaar te vermenigvuldigen.

### Voorbeeld

Bereken.

**a** $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ **b** $\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$

*Uitwerking*

**a** $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{6}{14} + \frac{7}{14} = \frac{13}{14}$ neem als nieuwe noemer $7 \cdot 2 = 14$

**b** $\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ neem als nieuwe noemer 6

**17** Bereken.

**a** $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} =$ ............

**b** $\frac{2}{5} - \frac{7}{10} =$ ............

**c** $\frac{5}{8} - \frac{2}{3} =$ ............

**d** $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} =$ ............

### Door elkaar

**18** Bereken.

**a** $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$ ............

**b** $\frac{3}{10} - \frac{7}{10} =$ ............

**c** $\frac{2}{3} + \frac{1}{12} =$ ............

**d** $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$ ............

## Theorie C Breuken met letters vereenvoudigen

Omdat $\frac{6}{8}$ hetzelfde is als $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$, mag je teller en noemer delen door 2 en krijg je $\frac{3}{4}$.

Omdat $\frac{7x}{9x}$ hetzelfde is als $\frac{7 \cdot x}{9 \cdot x}$, mag je teller en noemer delen door $x$ en krijg je $\frac{7}{9}$.

Verder is $\frac{12yz}{18z} = \frac{2y}{3}$. Je hebt teller en noemer door 6 en door $z$ gedeeld.

En zo is $\frac{8a}{-13a} = -\frac{8}{13}$. Je hebt teller en noemer door $a$ gedeeld en de negatieve min voor de breuk gebracht.

**19** Vereenvoudig.

**a** $\frac{3b}{3d} =$ ..................

**b** $\frac{3a}{5a} =$ ..................

**c** $\frac{pq}{pr} =$ ..................

**d** $\frac{5xy}{25xz} =$ ..................

Vereenvoudigen mag ook in stappen!

$$\frac{15yz}{20z} = \frac{3yz}{4z} = \frac{3y}{4}$$

(: 5, : $z$)

**20** Herleid. Vereenvoudig eerst de breuken.

**a** $\frac{15a}{3} + 5a =$ ..................

**b** $\frac{6xy}{3y} - x =$ ..................

**c** $-\frac{ab}{b} - 2a =$ ..................

**d** $\frac{15ac}{3c} - \frac{50ab}{5b} =$ ..................

$\frac{6ac}{c} + 4a = \frac{6a}{1} + 4a =$

$6a + 4a = 10a$

**21** Herleid.

**a** $\frac{-16x}{4} + 4x =$ ..................

**b** $\frac{28ab}{7ab} - 1 =$ ..................

**c** $\frac{36pq}{12q} + 2p =$ ..................

**d** $\frac{-21a}{7a} - \frac{12p}{3p} =$ ..................

## Theorie D Optellen en aftrekken van breuken met letters

Bij het optellen van *gelijknamige* breuken neem je de tellers samen, de noemer verandert niet. Dus $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ en $\frac{2}{p} + \frac{5}{p} = \frac{7}{p}$.

Verder is $\frac{3p}{q} + \frac{4p}{q} = \frac{7p}{q}$ en $\frac{2x}{y} + \frac{7z}{y} = \frac{2x + 7z}{y}$.

Niet-gelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig voordat je ze op kunt tellen.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{2x}{xy} = \frac{y + 2x}{xy}$$

De nieuwe noemer is $x \cdot y = xy$.

$$\frac{a}{4} + \frac{5}{b} = \frac{ab}{4b} + \frac{20}{4b} = \frac{ab + 20}{4b}$$

De nieuwe noemer is $4 \cdot b = 4b$.

Vermenigvuldig de teller en noemer met dezelfde letter.

$\frac{1}{x} \overset{\times y}{\underset{\times y}{=}} \frac{y}{xy}$ $\quad \frac{2}{y} \overset{\times x}{\underset{\times x}{=}} \frac{2x}{xy}$

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $\frac{7}{3a} + \frac{1}{3a}$

**b** $\frac{1}{a} + \frac{6}{b}$

**c** $2 + \frac{3}{a}$

**d** $\frac{5}{a} - \frac{7}{2a}$

*Uitwerking*

**a** $\frac{7}{3a} + \frac{1}{3a} = \frac{8}{3a}$

**b** $\frac{1}{a} + \frac{6}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{6a}{ab} = \frac{b + 6a}{ab}$

**c** $2 + \frac{3}{a} = \frac{2}{1} + \frac{3}{a} = \frac{2a}{a} + \frac{3}{a} = \frac{2a + 3}{a}$

**d** $\frac{5}{a} - \frac{7}{2a} = \frac{10}{2a} - \frac{7}{2a} = \frac{3}{2a}$

**22** Herleid.

**a** $\frac{8}{3p} + \frac{7}{3p}$

**b** $\frac{5}{2x} - \frac{7}{2x}$

**c** $\frac{2}{p} + \frac{4}{q}$

**d** $\frac{6}{k} - \frac{5}{m}$

**e** $\frac{13}{2y} - \frac{3}{2y}$

**f** $6 - \frac{1}{p}$

### Door elkaar

**23** Herleid.

a $\frac{p}{4p} + \frac{1}{p}$

b $\frac{18ac}{6c} + 2a$

c $\frac{11}{a} - \frac{5}{2b}$

d $\frac{3}{p} + \frac{1}{4}$

e $\frac{3x}{x} + 8$

f $\frac{24q}{8q} - \frac{28q}{7q}$

## Theorie E **Breuken vermenigvuldigen en delen**

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je de volgende regel.

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Dus $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$ en $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$.

Omdat $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$, heten de breuken $\frac{2}{5}$ en $\frac{5}{2}$ **elkaars omgekeerde**.

**Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.**

### Voorbeeld

Bereken.

a $\frac{2}{5} : \frac{7}{12}$

b $\frac{5}{8} : 2$

c $\frac{5}{8} \cdot 16$

*Uitwerking*

a $\frac{2}{5} : \frac{7}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{7} = \frac{24}{35}$

b $\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{8} : \frac{2}{1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$

c $\frac{5}{8} \cdot 16 = \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{1} = \frac{80}{8} = 10$

**24** Bereken.

a $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$

b $3 \cdot \frac{2}{7}$

c $-5 \cdot \frac{2}{7}$

d $\frac{2}{5} : 4$

e $-\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$

f $\frac{1}{8} : 12$

## Theorie F Breuken met letters vermenigvuldigen en delen

Het vermenigvuldigen en delen van breuken met letters gaat op dezelfde manier als bij breuken met getallen.

*Vermenigvuldigen*

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{4}{y} = \frac{12}{xy}$$

$$\frac{a}{5} \cdot \frac{a}{-b} = -\frac{a^2}{5b}$$

*Delen*

$$\frac{2}{c} : \frac{5}{d} = \frac{2}{c} \cdot \frac{d}{5} = \frac{2d}{5c}$$

$$4 : \frac{6}{a} = \frac{4}{1} \cdot \frac{a}{6} = \frac{4a}{6} = \frac{2a}{3}$$

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $\frac{7}{x} \cdot y$

**b** $\frac{3}{k} : \frac{27}{l}$

*Uitwerking*

**a** $\frac{7}{x} \cdot y = \frac{7}{x} \cdot \frac{y}{1} = \frac{7y}{x}$

**b** $\frac{3}{k} : \frac{27}{l} = \frac{3}{k} \cdot \frac{l}{27} = \frac{3l}{27k} = \frac{l}{9k}$

**25** Herleid.

**a** $\frac{x}{12} \cdot \frac{9}{y}$

**b** $\frac{a}{4} : \frac{3}{c}$

**c** $\frac{p}{9} \cdot r$

**d** $\frac{a}{5} : \frac{8b}{c}$

### Door elkaar

**26** Herleid.

**a** $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$

**b** $\frac{2p}{pq} + \frac{7}{q}$

**c** $\frac{3}{p} \cdot \frac{6}{q}$

**d** $\frac{6}{r} : \frac{p}{9}$

**e** $\frac{4}{ab} - \frac{8}{ab}$

**f** $\frac{1}{6} : a$

**g** $\frac{5a}{10a} + \frac{4a}{2a}$

**h** $5 - \frac{3}{a}$

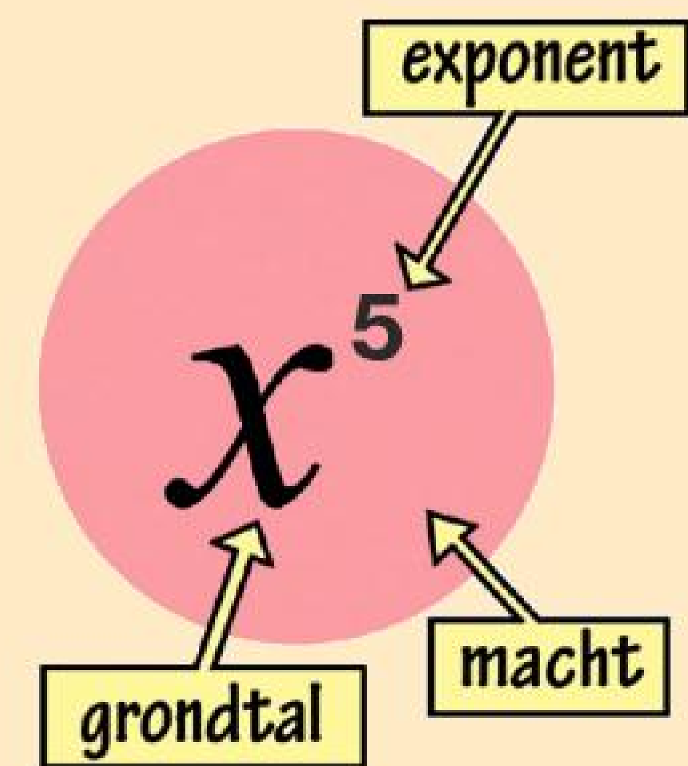
**i** $\frac{9xy}{3y} - x$

**j** $\frac{10}{b} - \frac{4}{9a}$

# 2.4 Machten

## Theorie A Machten vermenigvuldigen

Een **macht** is een product van gelijke factoren.
Zo is $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ en is $x^2 = x \cdot x$.
Een product van twee machten met hetzelfde **grondtal** kun je schrijven als één macht.
Zo is $x^5 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^7$.
De exponent 7 krijg je door exponenten 5 en 2 op te tellen.
Je ziet dat het grondtal $x$ gelijk blijft.




**Bij het product van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op. Het grondtal blijft gelijk.**
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

Dus $a^7 \cdot a^9 = a^{16}$ en $2p^3 \cdot 5p^4 = 10p^7$ en $a^8 \cdot 8a = 8a^9$.
In $2b^5 \cdot 4a^3$ zijn de grondtallen niet hetzelfde. Je mag de exponenten dan niet optellen. Je krijgt $2b^5 \cdot 4a^3 = 8a^3b^5$.

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $2a^3 \cdot 6a^4$
**b** $-3x^4 \cdot x^8$
**c** $4c \cdot -4c^5 \cdot -2c^8$
**d** $2x^4 \cdot 3y^5$

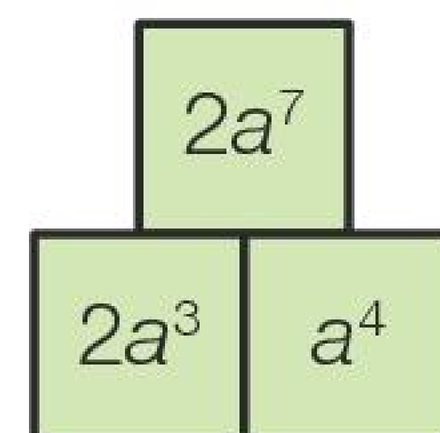
*Uitwerking*

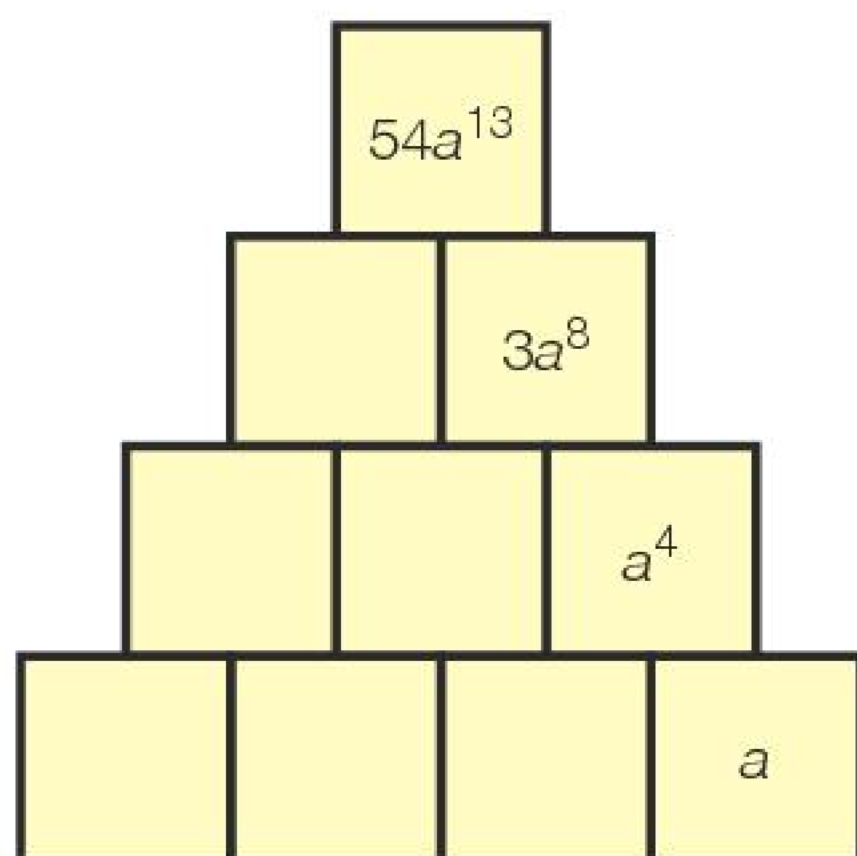
**a** $2a^3 \cdot 6a^4 = 12a^7$ — $2 \cdot 6 = 12$ en $3 + 4 = 7$
**b** $-3x^4 \cdot x^8 = -3x^{12}$ — $-3 \cdot 1 = -3$ en $4 + 8 = 12$
**c** $4c \cdot -4c^5 \cdot -2c^8 = 32c^{14}$ — $4 \cdot -4 \cdot -2 = 32$, $c = c^1$ en $1 + 5 + 8 = 14$
**d** $2x^4 \cdot 3y^5 = 6x^4y^5$ — de grondtallen $x$ en $y$ zijn niet gelijk

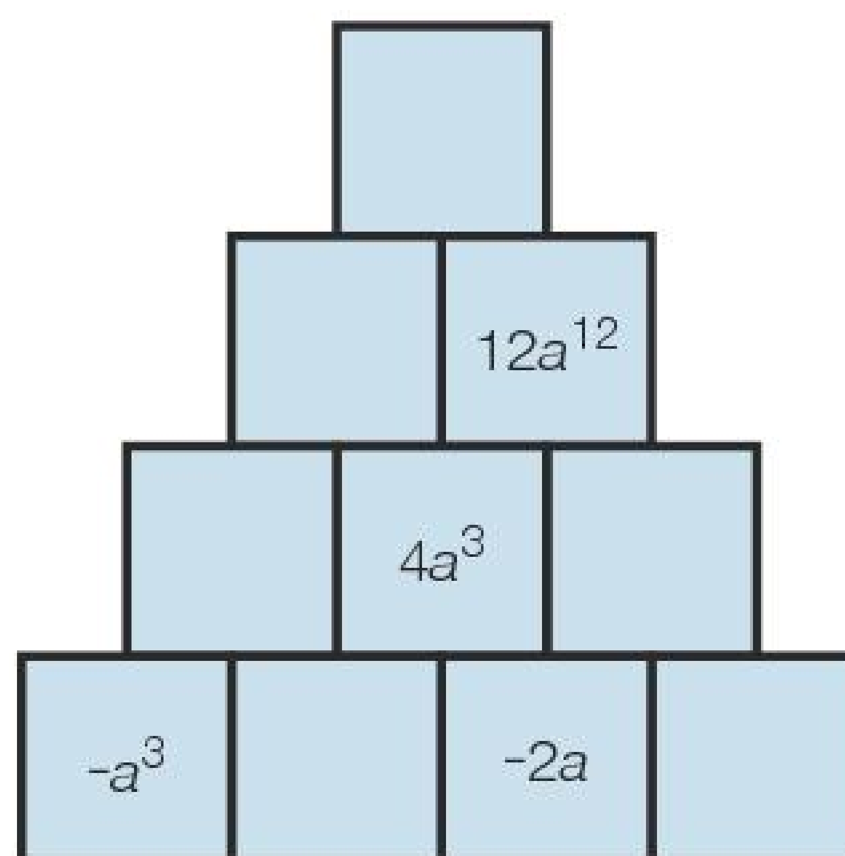
**27** Herleid.

**a** $2b^3 \cdot 2b^2 =$ ..........
**b** $3k^2 \cdot -9k^5 =$ ..........
**c** $5x^{10} \cdot -y^{10} =$ ..........
**d** $-3y \cdot -y^{13} =$ ..........
**e** $11a^4 \cdot -2b^5 =$ ..........
**f** $4x^3 \cdot 2x^7 \cdot -2x^2 =$ ..........
**g** $-3a^3 \cdot -a^6 \cdot 2c =$ ..........
**h** $-x \cdot -12x^4 \cdot x^2 =$ ..........

**28** In elk hokje van de vermenigvuldigingspiramide komt het product van de twee hokjes eronder.
Vul de vermenigvuldigpiramides verder in.




## Theorie B Machten optellen

Van de som $2x^2 + 5x^2$ zijn de termen $2x^2$ en $5x^2$ gelijksoortig, want in beide termen zit hetzelfde grondtal met dezelfde exponent. Je kunt $2x^2 + 5x^2$ herleiden tot $7x^2$, maar je kunt $5x^3 + 2x^5$ niet herleiden, want de termen zijn niet gelijksoortig.
Ook $4a^2b + 7ab^2$ kun je niet herleiden, want de termen $a^2b$ en $ab^2$ zijn niet gelijksoortig.

### Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $3x^2 + 2x^2$
**b** $6x^5 + x^5$
**c** $4ab^2 - 5ab^2$
**d** $-6a^3b^2 + 7a^3b^2$
**e** $8kl^2 - 4k^3l^2$
**f** $9a^5b^2 - 3a^5b^2$

*Uitwerking*

**a** $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$
**b** $6x^5 + x^5 = 7x^5$
**c** $4ab^2 - 5ab^2 = -ab^2$
**d** $-6a^3b^2 + 7a^3b^2 = a^3b^2$
**e** $8kl^2 - 4k^3l^2$ kan niet
**f** $9a^5b^2 - 3a^5b^2 = 6a^5b^2$

**29** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $5x^2 + 9x^2$ ..........
**b** $-5a^4 + 5a^4$ ..........
**c** $3x^3y - x^3y^2$ ..........
**d** $xy^3 + 3xy^3$ ..........
**e** $-a^4b^2 - a^4b^2$ ..........
**f** $-4y^2 + 3y^2$ ..........

### Door elkaar

**30** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $13x^4y^3 + x^4y^3$ ..................

**b** $-b^5 + b^5$ ..................

**c** $6ab^2 + 5a^4b$ ..................

**d** $3b^5 \cdot 4b^7$ ..................

**e** $4x^3y^2 \cdot -6x^4y^9$ ..................

**f** $6a^6b - 8a^6b$ ..................

## Theorie C Een macht van een macht

$x^3$ is een macht, dus $(x^3)^5$ is een macht van een macht.
$(x^3)^5$ betekent $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$, dus
$(x^3)^5 = x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^{3+3+3+3+3} = x^{15}$.

**Bij een macht van een macht blijft het grondtal gelijk.**
**Verder vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.**
**$(a^p)^q = a^{pq}$**

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $(x^5)^6$

**b** $5(a^2)^9 - 2(a^3)^6$

**c** $(b^4)^2 \cdot 3b$

*Uitwerking*

**a** $(x^5)^6 = x^{30}$

**b** $5(a^2)^9 - 2(a^3)^6 = 5a^{18} - 2a^{18} = 3a^{18}$

**c** $(b^4)^2 \cdot 3b = b^8 \cdot 3b = 3b^9$

**31** Herleid.

**a** $(x^3)^5 =$ ..................

**b** $(b^7)^2 =$ ..................

**c** $6x^2 \cdot (x^2)^4 =$ ..................

**d** $(a^2)^4 + (a^4)^2 =$ ..................

**e** $3a^{10} - 4(a^5)^2 =$ ..................

**f** $11(y^6)^5 - 11(y^{15})^2 =$ ..................

### Door elkaar

**32** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $6x^4y^6 - x^4y^6$ ..........

**b** $3a^{10} - 4(a^5)^2$ ..........

**c** $x^5 \cdot -2x^9$ ..........

**d** $a^2b^3 + 2a^3b^2$ ..........

**e** $-a^3b^5 \cdot -a^6$ ..........

**f** $4x^4y^8 - 9x^4y^8$ ..........

**g** $-3a^3 \cdot 4ab^5$ ..........

**h** $2x^4 - 4(x^2)^2$ ..........

## Theorie D De macht van een product

$(xy)^3$ is de derde macht van het product $xy$.
Werk je de haakjes weg, dan krijg je
$(xy)^3 = x^3y^3$, want $(xy)^3 = xy \cdot xy \cdot xy = x^3y^3$.

**Bij een macht van een product neem je elke factor tot die macht.**
$(ab)^p = a^pb^p$

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $(ab)^6$ **b** $(-3b^2)^4$ **c** $-5(pq)^7$

*Uitwerking*

**a** $(ab)^6 = a^6b^6$
**b** $(-3b^2)^4 = (-3)^4 \cdot b^8 = 81b^8$
**c** $-5(pq)^7 = -5p^7q^7$

**33** Herleid.

**a** $(xy)^6 =$ ..........

**b** $(7x)^2 =$ ..........

**c** $(-a)^7 =$ ..........

**d** $-(3b)^2 =$ ..........

**e** $-4(x^2y)^3 =$ ..........

**f** $(xyz)^5 =$ ..........

### Door elkaar

**34** Herleid.

a $(-2x^2)^3$
b $(xyz^2)^5$
c $(-2a^2b^2c)^4$
d $(5x^3)^2 + 5(x^2)^3$
e $4(ab)^4 \cdot a^3b^5$
f $(-2q^4)^3 - (q^6)^2$

## Theorie E **Machten op elkaar delen**

Je kunt $\frac{a^5}{a^2}$ schrijven als een macht van $a$, want $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a^3 \cdot a^2}{a^2} = a^3$.
Teller en noemer zijn gedeeld door $a^2$.

**Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af. Het grondtal blijft gelijk.**
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Bij het herleiden van $\frac{12a^{10}}{4a^2}$ krijg je $\frac{12a^{10}}{4a^2} = \frac{12}{4} \cdot \frac{a^{10}}{a^2} = 3a^8$.

Schrijf voortaan in één keer op $\frac{12a^{10}}{4a^2} = 3a^8$.

Je weet dat $\frac{4}{4} = 1$ en $\frac{7a}{7a} = 1$, dus ook $\frac{a^5}{a^5} = 1$.

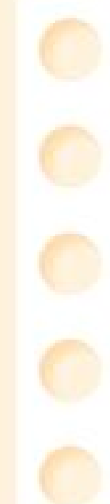
$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^p}{a^p} = 1 \\ \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0 \end{array}\right\} a^0 = 1$$

### Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{b^{11}}{b^7}$
b $\frac{q^4}{q}$
c $\frac{y^7}{y^7}$
d $\frac{8x^{15}}{2x^5}$

*Uitwerking*



a $\frac{b^{11}}{b^7} = b^4$
b $\frac{q^4}{q} = q^3$
c $\frac{y^7}{y^7} = 1$
d $\frac{8x^{15}}{2x^5} = 4x^{10}$

**35** Herleid.

a $\frac{a^8}{a^3} =$ ……………………………………

b $\frac{y^9}{y} =$ ……………………………………

c $\frac{11b^5}{11b^5} =$ ……………………………………

d $\frac{12x^{10}}{4x^5} =$ ……………………………………

## Door elkaar

**36** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $\frac{a^{13}}{a^{10}}$ ……………………………………

b $a^{10} + a^{13}$ ……………………………………

c $(10a)^3$ ……………………………………

d $10a + 13a$ ……………………………………

e $a^{10} \cdot a^{13}$ ……………………………………

f $\frac{10a}{13a}$ ……………………………………

g $a^{13} - a^{10}$ ……………………………………

h $\frac{16a^8}{4a^6}$ ……………………………………

i $a^9 \cdot (a^5)^2$ ……………………………………

j $a^9 + 4(a^3)^2$ ……………………………………

k $5a^6 - 3(a^3)^2$ ……………………………………

l $11a^7 - 7a^7$ ……………………………………

m $3p^7 \cdot -8p^4$ ……………………………………

n $\frac{p^{12}}{(p^2)^6}$ ……………………………………

o $-8y^3 \cdot 5y^2$ ……………………………………

p $12a^6 - 4a^2 \cdot 2a^4$ ……………………………………

# 3 Lineaire verge-lijkingen en formules

## 3.1 Lineaire vergelijkingen

### Theorie A Termen overbrengen

De vergelijking $6x - 13 = 8x - 3$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking**. Je lost deze vergelijking op in drie stappen.

$6x - 13 = 8x + 3$

$-8x \quad\quad -8x$

$-2x - 13 = 3$

$\quad +13 \quad +13$

$-2x \quad = 16$

$:-2 \quad\quad :-2$

$x \quad = -8$

Het kan ook anders. Je doet dan stap 1 en 2 tegelijk. Je brengt de term met de **variabele** naar links en de losse getallen naar rechts. Dat mag, maar je vervangt dan wel een – door een + en andersom.
Dus $8x$ wordt $-8x$ en $-13$ wordt $+13$. Deze manier noemen we **overbrengen van termen** en dit gaat als volgt.

| | |
|---|---|
| $6x - 13 = 8x + 3$ | breng $8x$ naar het linkerlid en $-13$ naar het rechterlid |
| $6x - 8x = 3 + 13$ | herleid beide leden |
| $-2x = 16$ | deel links en rechts door het getal voor de variabele |
| $x = -8$ | |

#### Voorbeeld

Los op.

**a** $10a - 4 = 7a + 20$

**b** $4 + 2x = x - 3$

*Uitwerking*

**a** $10a - 4 = 7a + 20$
$10a - 7a = 20 + 4$
$3a = 24$
$a = 8$

**b** $4 + 2x = x - 3$
$2x - x = -3 - 4$
$x = -7$

**1** Los op. Gebruik het overbrengen van termen.

Letters links, rest rechts.

**a** $5x - 7 = 12x - 7$
**b** $3a - 2 = a + 4$
**c** $-5b - 10 = -6b + 3$
**d** $x - 5 = 4x + 1$

## Theorie B Lineaire vergelijkingen oplossen

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

**Werkschema: Lineaire vergelijkingen oplossen**

1. Werk zo nodig de haakjes weg.
2. Breng de termen met de variabele naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.
3. Herleid beide leden.
4. Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op.

**a** $5(x - 2) = 9x + 22$

**b** $3(x + 6) = -6(x - 9)$

*Uitwerking*

**a** $5(x - 2) = 9x + 22$
$5x - 10 = 9x + 22$
$5x - 9x = 22 + 10$
$-4x = 32$
$x = -8$

**b** $3(x + 6) = -6(x - 9)$
$3x + 18 = -6x + 54$
$3x + 6x = 54 - 18$
$9x = 36$
$x = 4$

**2** Los op.

**a** $5(x - 3) = 2x + 9$
**b** $5a + 7 = 3(a + 8)$
**c** $3(x - 1) = -x + 12$
**d** $2y - 8 = 3 + 3(y - 7)$
**e** $4(x - 4) = 5(x - 5)$
**f** $3(y + 5) = -2(y + 10)$

**3** Los op.

**a** $9x = x - 16$
**b** $4(3x - 2) + 12 = 28$
**c** $2(p - 2) = 3(p + 5)$
**d** $-y - 1 = -2y$
**e** $5(3y - 7) + 7 = 7(2y - 4)$
**f** $5a - 10 = 3a - 2$

# 3.2 Lineaire formules

## Theorie A De grafiek van een lineaire formule

De formule $B = 40x + 20$ is een voorbeeld van een **lineaire formule**.
Er bestaat een **lineair verband** tussen $x$ en $B$.

De grafiek van een lineaire formule is een rechte lijn.
Om een lijn te kunnen tekenen, hoef je maar twee punten te weten.
In de tabel van een lineaire formule zet je daarom twee punten.

### Voorbeeld

**a** Teken de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
**b** Ga met een berekening na of het punt $P(-12, 8)$ op de grafiek ligt.

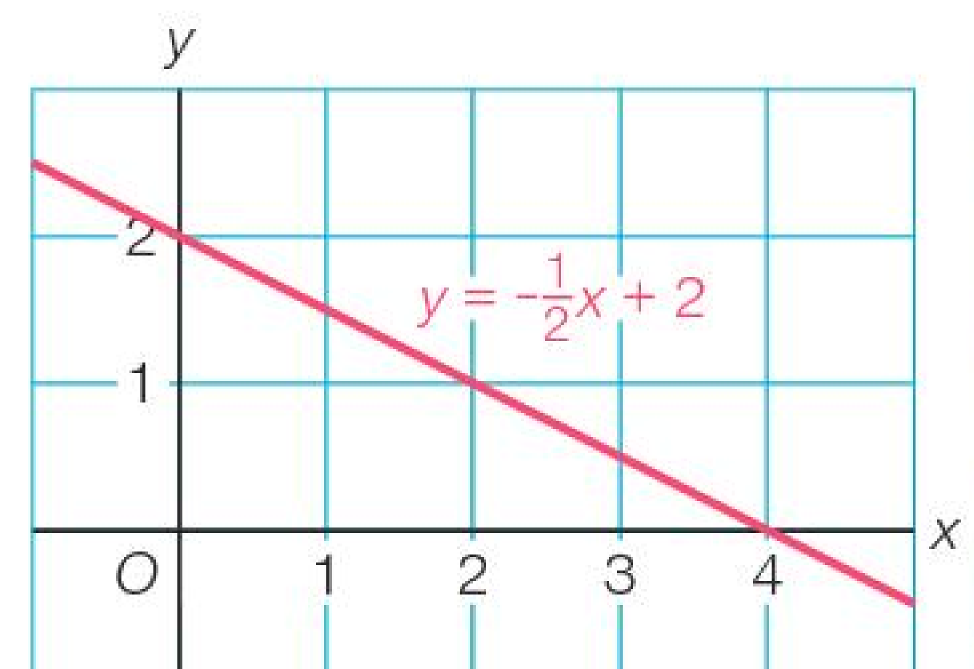
*Uitwerking*

**a**

| x | 0 | 4 |
|---|---|---|
| y | 2 | 0 |

Zie de figuur hiernaast.

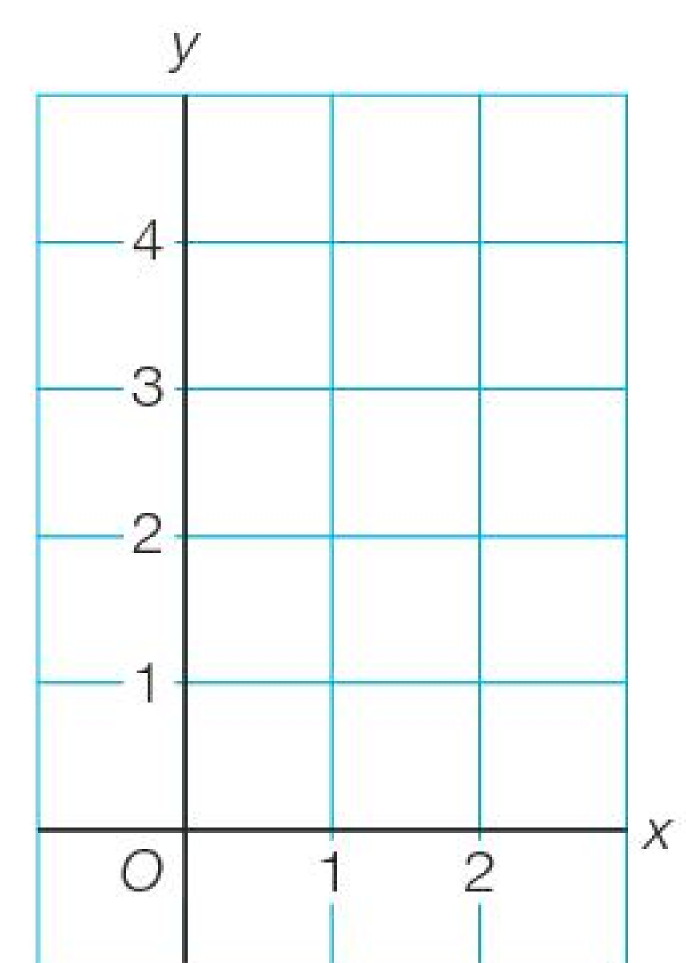
**b** $x = -12$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot -12 + 2 = 8$
Dus $P$ ligt op de grafiek.



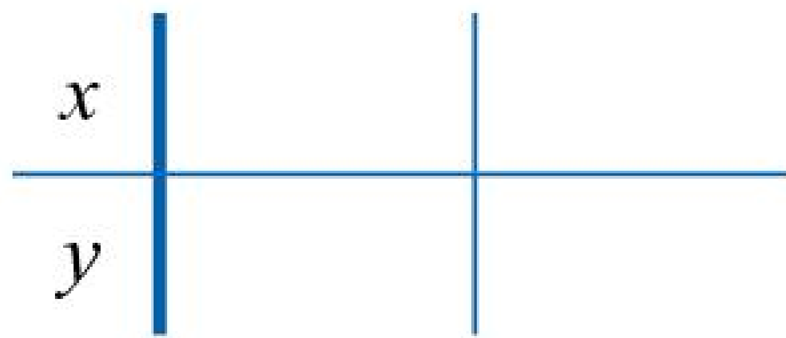

**4** **a** Teken in het assenstelsel hiernaast de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x + 2$. Vul eerst de tabel in.

| x | 0 | 2 |
|---|---|---|
| y | | |

**b** Ga met een berekening na of de volgende punten op de grafiek liggen.
$A(5, 9\frac{1}{2})$
$B(-5, -3\frac{1}{2})$
$C(14, 23)$

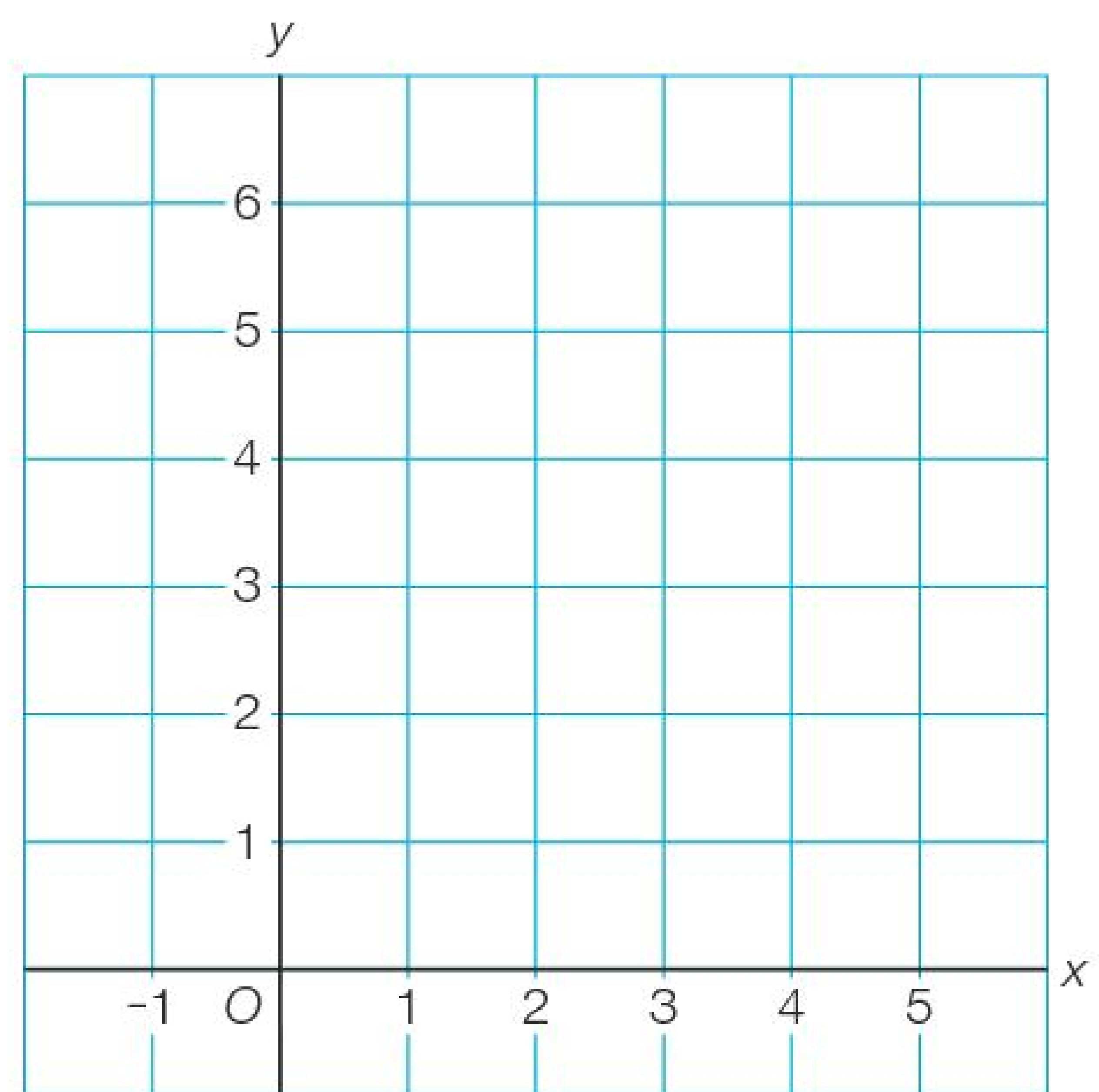


**5** **a** Teken hiernaast de grafiek van $y = 5 - 0{,}6x$. Vul eerst de tabel in.



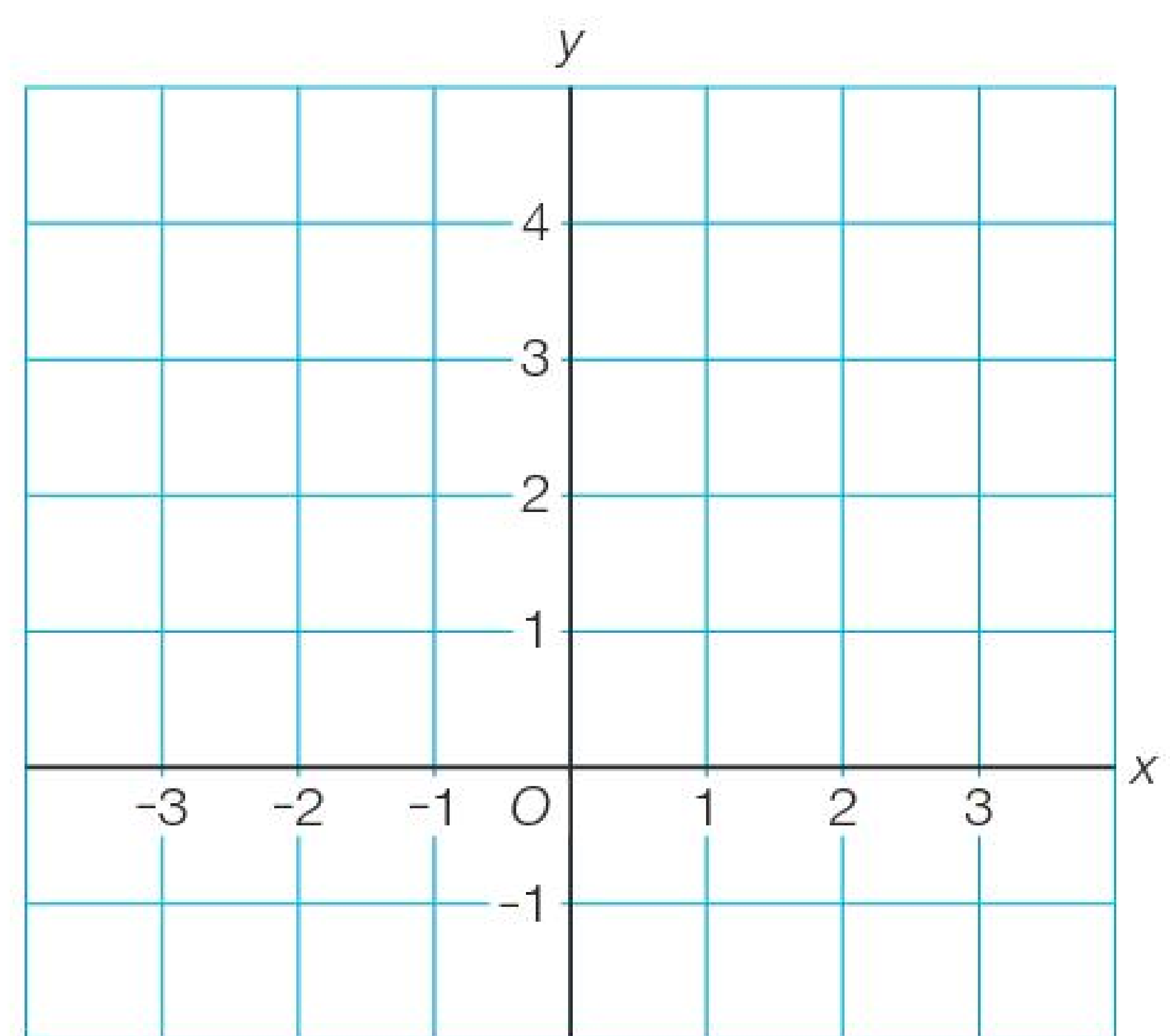
| $x$ | |
|---|---|
| $y$ | |

**b** Onderzoek welke van de volgende punten op de grafiek liggen.
$P(7, 1)$
$Q(-5, 8)$
$R(20, -13)$



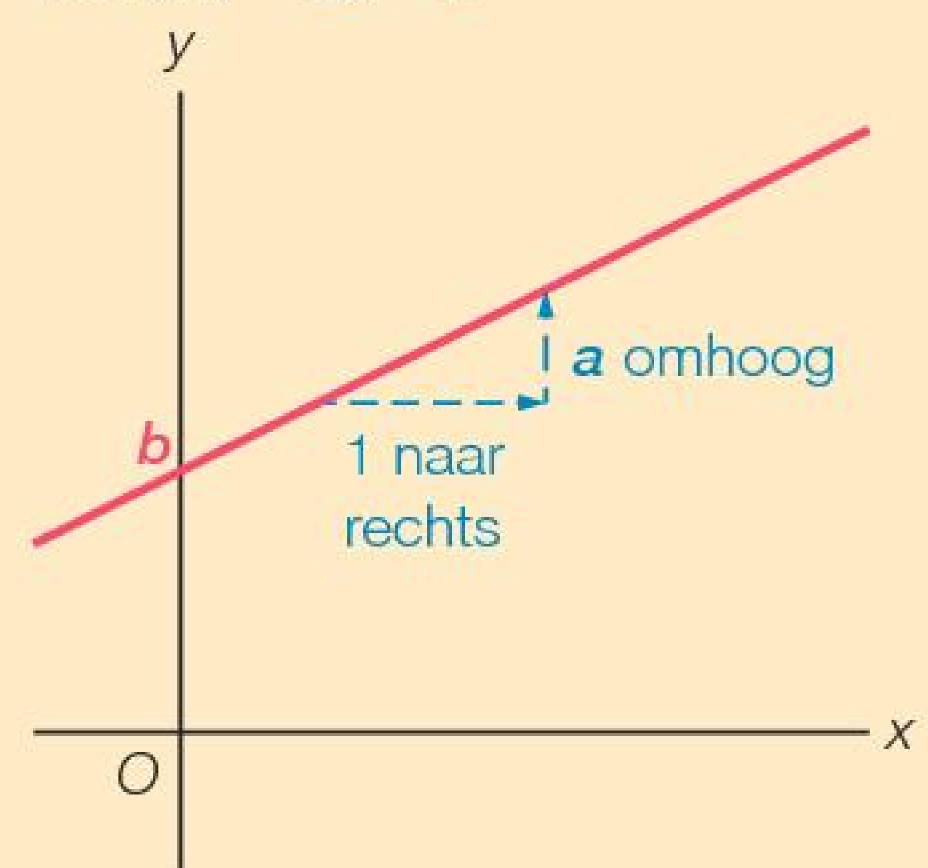
**6** **a** Teken hiernaast de grafieken van $y = 1\frac{1}{2}x$ en $y = x - 3$ en $y = -2x + 4$. Maak eerst tabellen in je schrift.

**b** Op welke van deze grafieken ligt het punt $P(-8, -12)$?



## Theorie B De formule $y = ax + b$

Bij een lineair verband tussen $x$ en $y$ hoort een formule van de vorm $y = ax + b$.
In deze formule is $a$ de **richtingscoëfficiënt (rc)**, dit betekent 1 naar rechts en $a$ omhoog. De hoogte waarop de grafiek de $y$-as snijdt, is $b$.




Voor $a = -2$ en $b = 6$ krijg je de formule $y = -2x + 6$.
De grafiek van $y = -2x + 6$ heeft rc $= -2$ en snijdt de $y$-as in het punt $(0, 6)$.

Voor $a = 3$ en $b = 0$ krijg je $y = 3x + 0$, oftewel $y = 3x$.
De grafiek heeft rc $= 3$ en snijdt de $y$-as in het punt $(0, 0)$.

**De grafiek van $y = ax + b$ is een lijn met rc $= a$ en snijdt de $y$-as in het punt $(0, b)$.**

De grafieken van $y = 3x - 5$ en $y = 3x + 2$ hebben beide rc = 3.
De grafieken hebben dezelfde richting, ze zijn **evenwijdig**.

De grafieken van $y = 3x - 5$ en $y = -2x - 5$ hebben hetzelfde snijpunt met de $y$-as, namelijk het punt $(0, -5)$.

**7** Gegeven zijn de volgende formules.
$y = 1\frac{1}{2}x + 4$ $\quad$ $y = 2x + 3$ $\quad$ $y = 1\frac{1}{2}x + 3$

**a** Van welke formules snijden de grafieken de $y$-as in hetzelfde punt? Hoe kun je dat aan de formules zien?

**b** Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig? Hoe kun je dat aan de formules zien?

**8** Gegeven zijn de volgende formules.

| | | |
|---|---|---|
| I $y = 2\frac{1}{2}x + 4$ | III $y = 2\frac{1}{2}x + 8$ | V $y = -0{,}7x + 8$ |
| II $y = 4x + 8$ | IV $y = -0{,}7x + 1$ | VI $y = -4x + 4$ |

**a** Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?

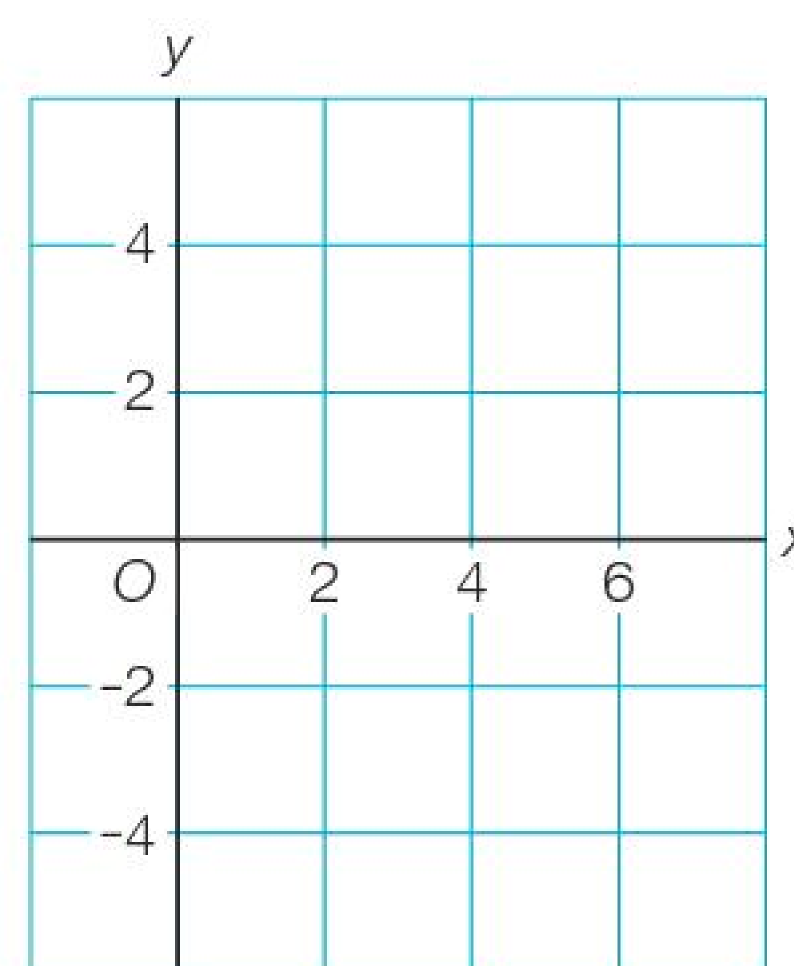
**b** Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de $y$-as?

**9** Gegeven is de formule $y = -2\frac{1}{2}x + 4$.

**a** In welk punt snijdt de grafiek de $y$-as?

**b** Geef de richtingscoëfficiënt van de grafiek.

**c** Teken hiernaast de grafiek.



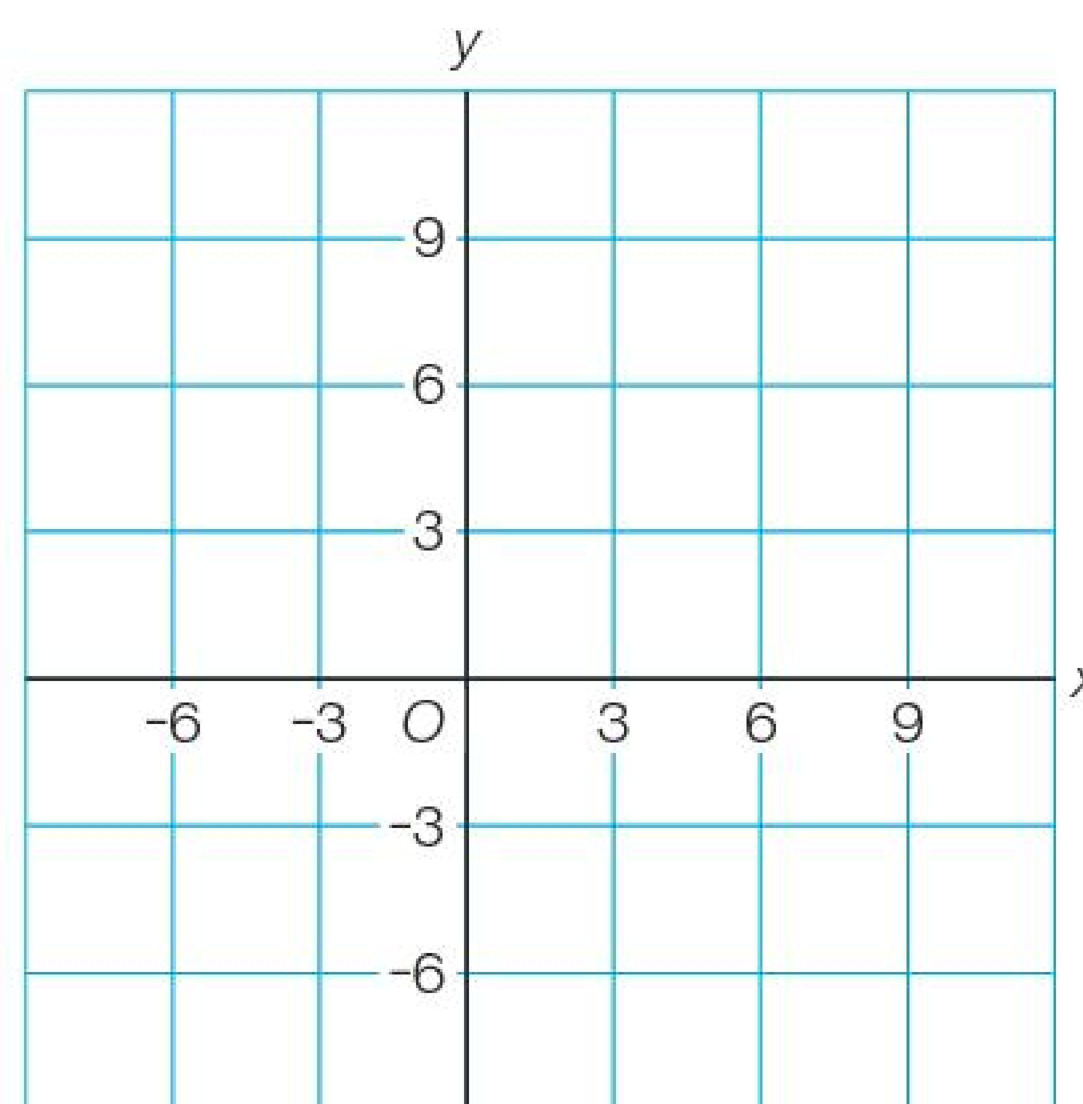

**10** Gegeven zijn de formules

| | |
|---|---|
| I $y = 3x - 6$ | IV $y = 1\frac{1}{2}x - 6$ |
| II $y = 1\frac{1}{2}x + 8$ | V $y = -3x + 3$ |
| III $y = 3x + 3$ | VI $y = 1\frac{1}{7}x + 3$ |

**a** Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?

**b** Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de $y$-as?

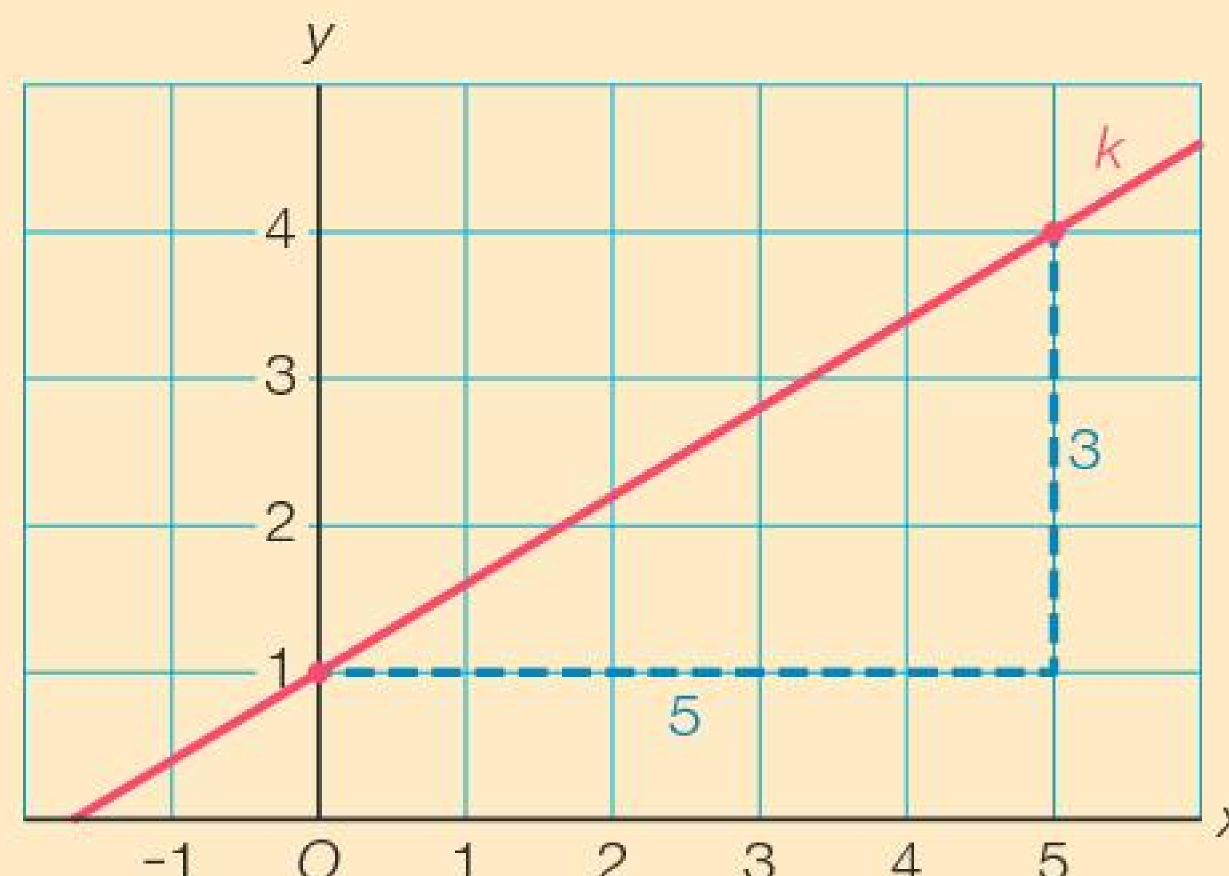
**c** Teken de grafieken van de formules I, III en V in het assenstelsel hiernaast.



# 3.3 Formules opstellen en vergelijken

## Theorie A De formule van een lijn opstellen

Van een lijn door twee gegeven punten kun je de formule opstellen. Voor de lijn $k$ in de figuur hiernaast zie je hieronder hoe dat gaat.
Je gaat uit van $y = ax + b$.
Je berekent $a$ door twee roosterpunten op de lijn te zoeken.
Dat zijn voor lijn $k$ de punten (0, 1) en (5, 4).




Bereken $a$ met $a = \dfrac{\text{toename verticaal}}{\text{toename horizontaal}}$.
Dus $a = \frac{3}{5}$.
De lijn $k$ snijdt de $y$-as in het punt (0, 1), dus $b = 1$.
Dus $k$ heeft de formule $y = \frac{3}{5}x + 1$. Dit noteer je als $k$: $y = \frac{3}{5}x + 1$.

**Werkschema: De formule van een lijn opstellen**

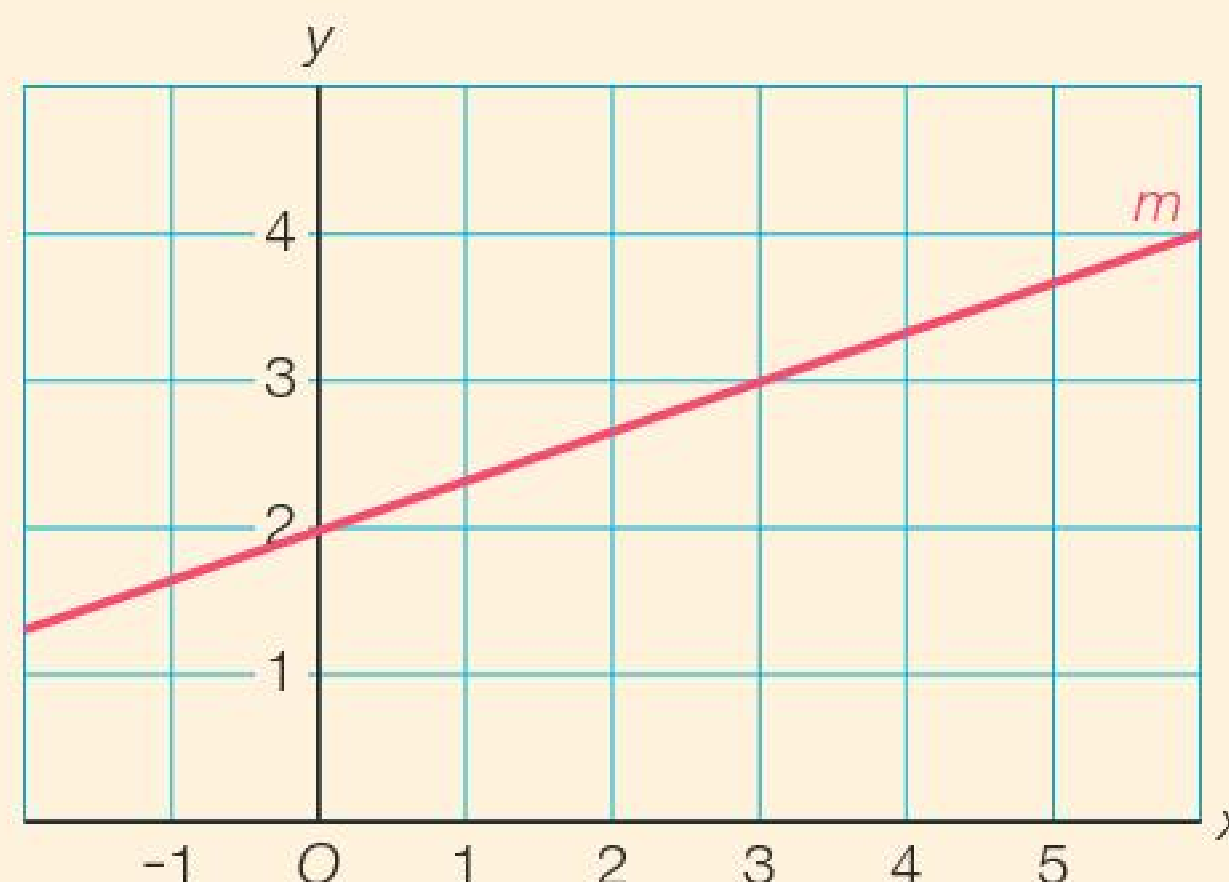
**1** Ga uit van $y = ax + b$.
**2** Zoek twee roosterpunten op de lijn.
Daarmee bereken je $a$ met $a = \dfrac{\text{toename verticaal}}{\text{toename horizontaal}}$.
**3** Zoek het snijpunt van de lijn met de $y$-as. Daaruit volgt $b$.
**4** Schrijf de formule op.

### Voorbeeld

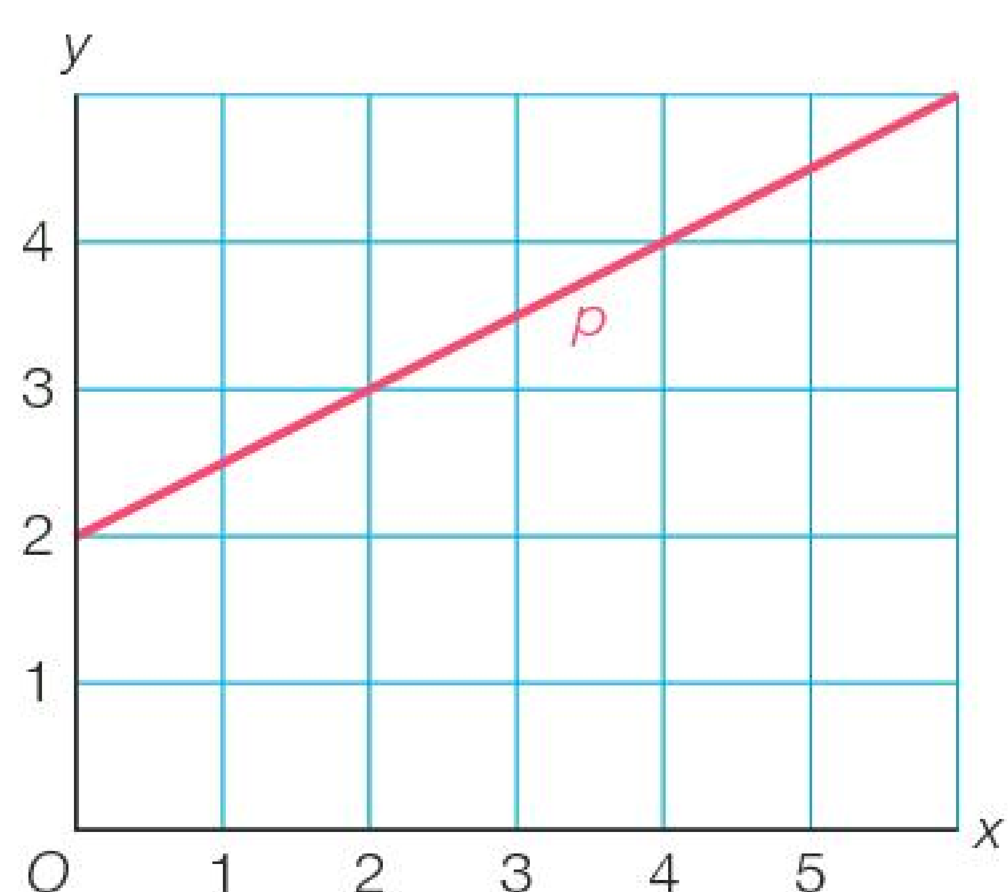
Stel de formule op van lijn $m$.

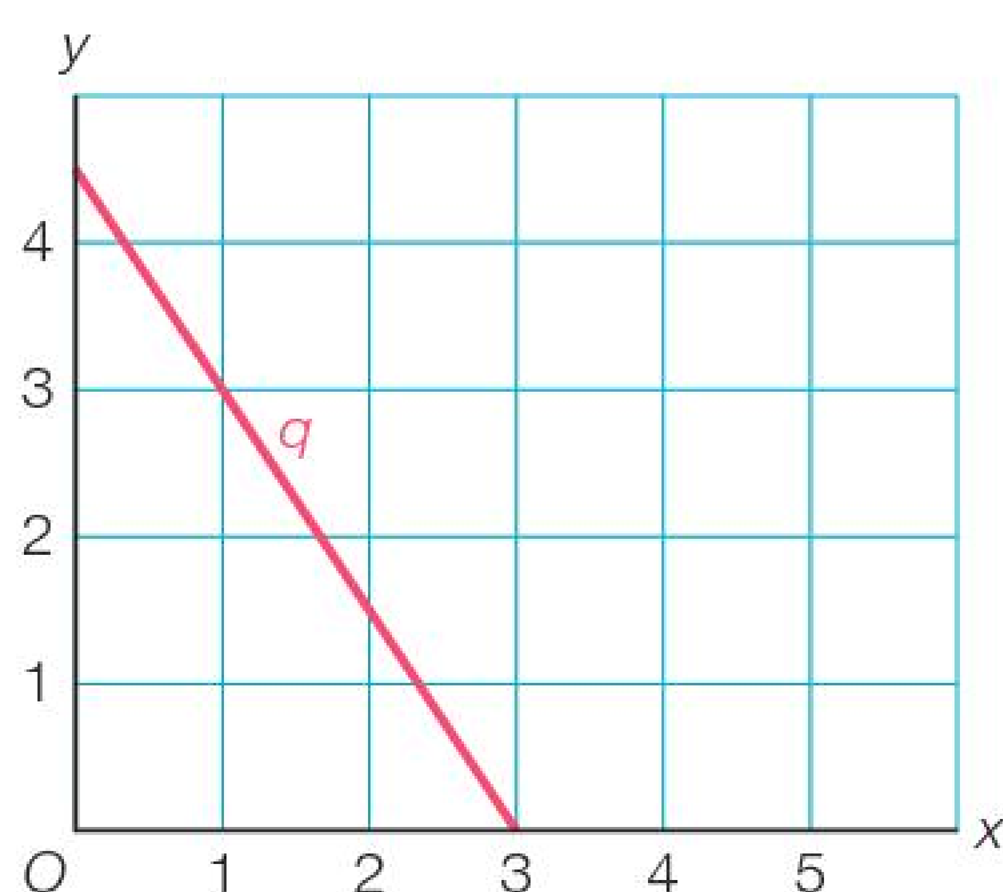
*Uitwerking*

$m$: $y = ax + b$
Door (0, 2) en (3, 3), dus $a = \frac{1}{3}$.
$b = 2$
Dus $m$: $y = \frac{1}{3}x + 2$.



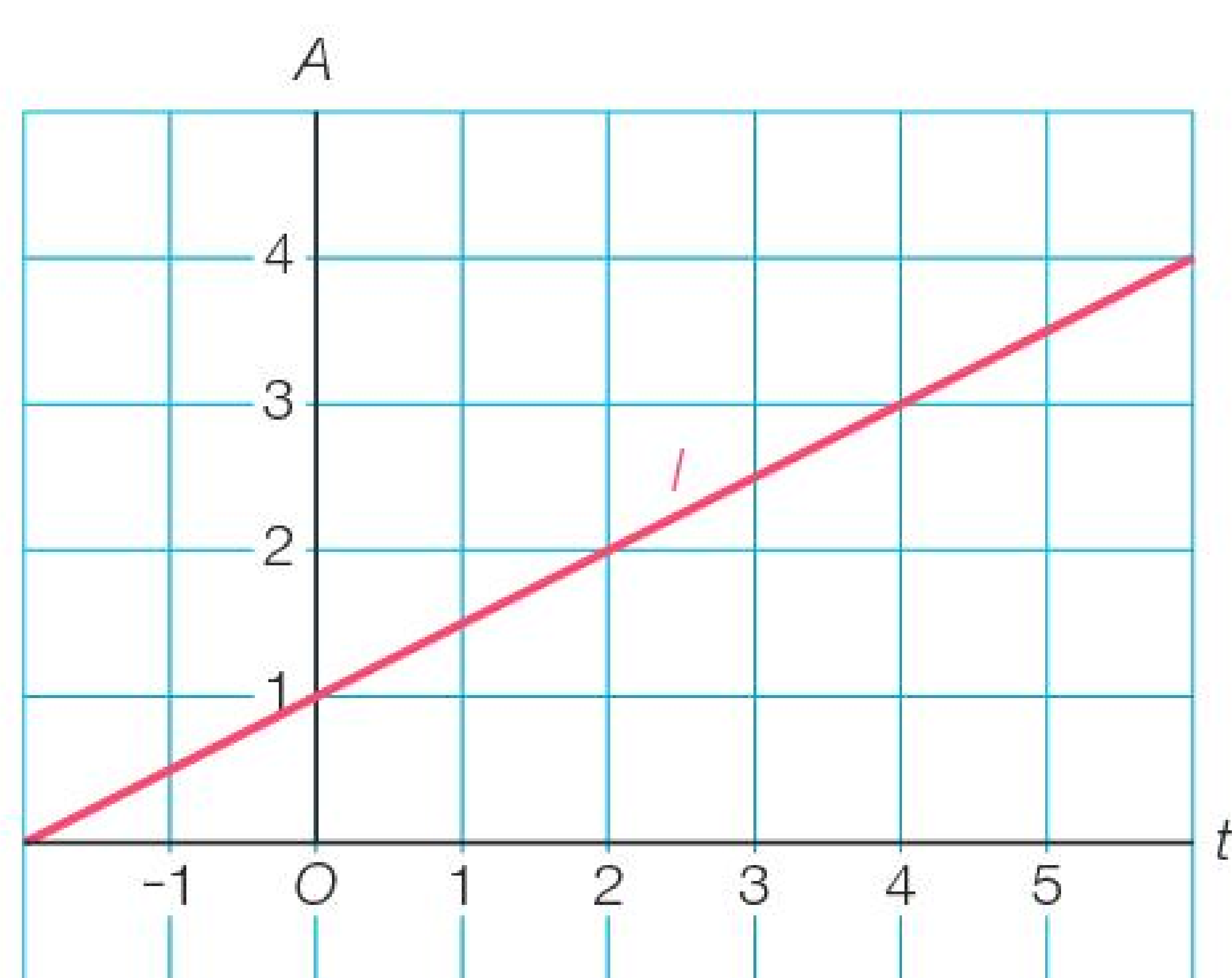
**11**



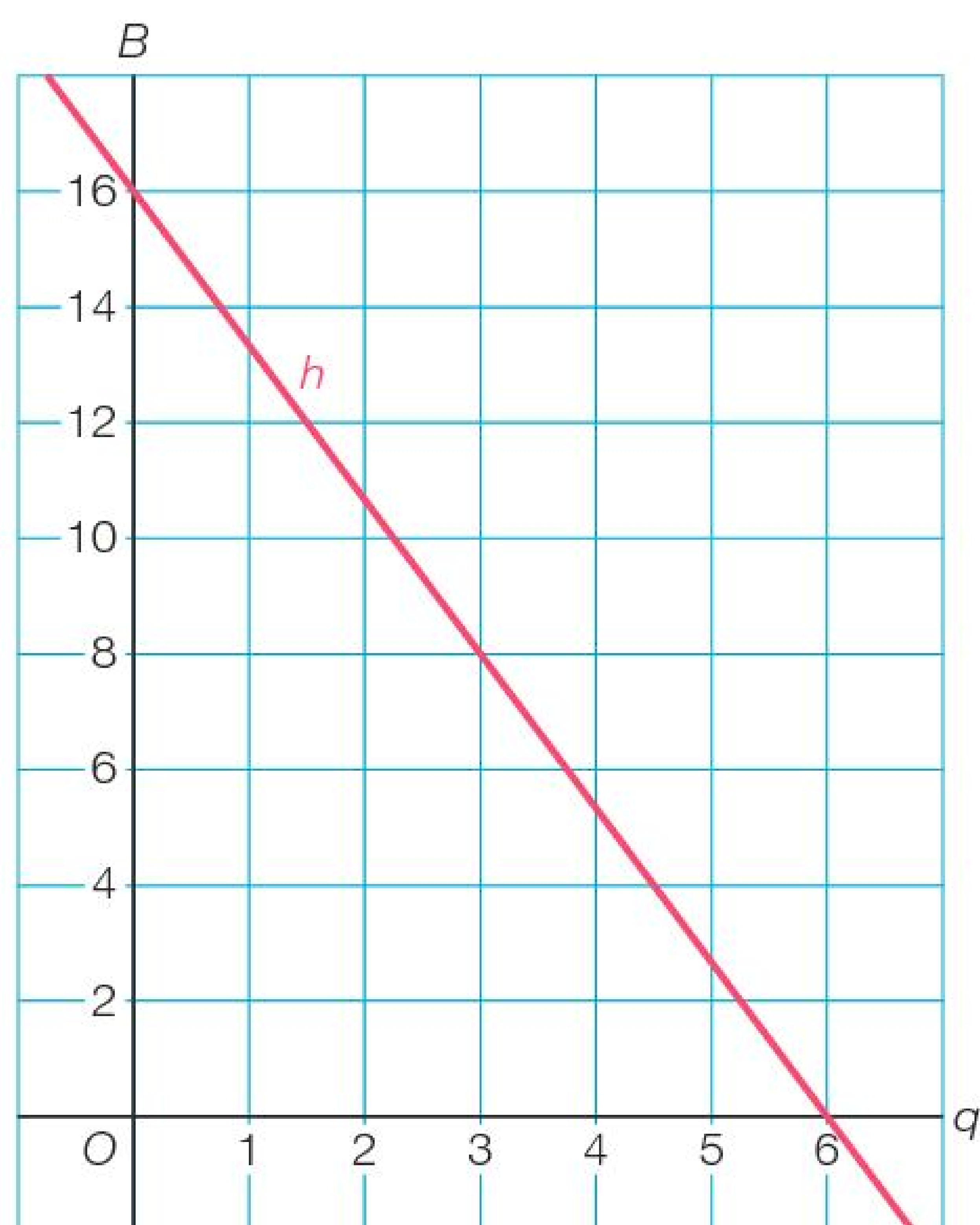



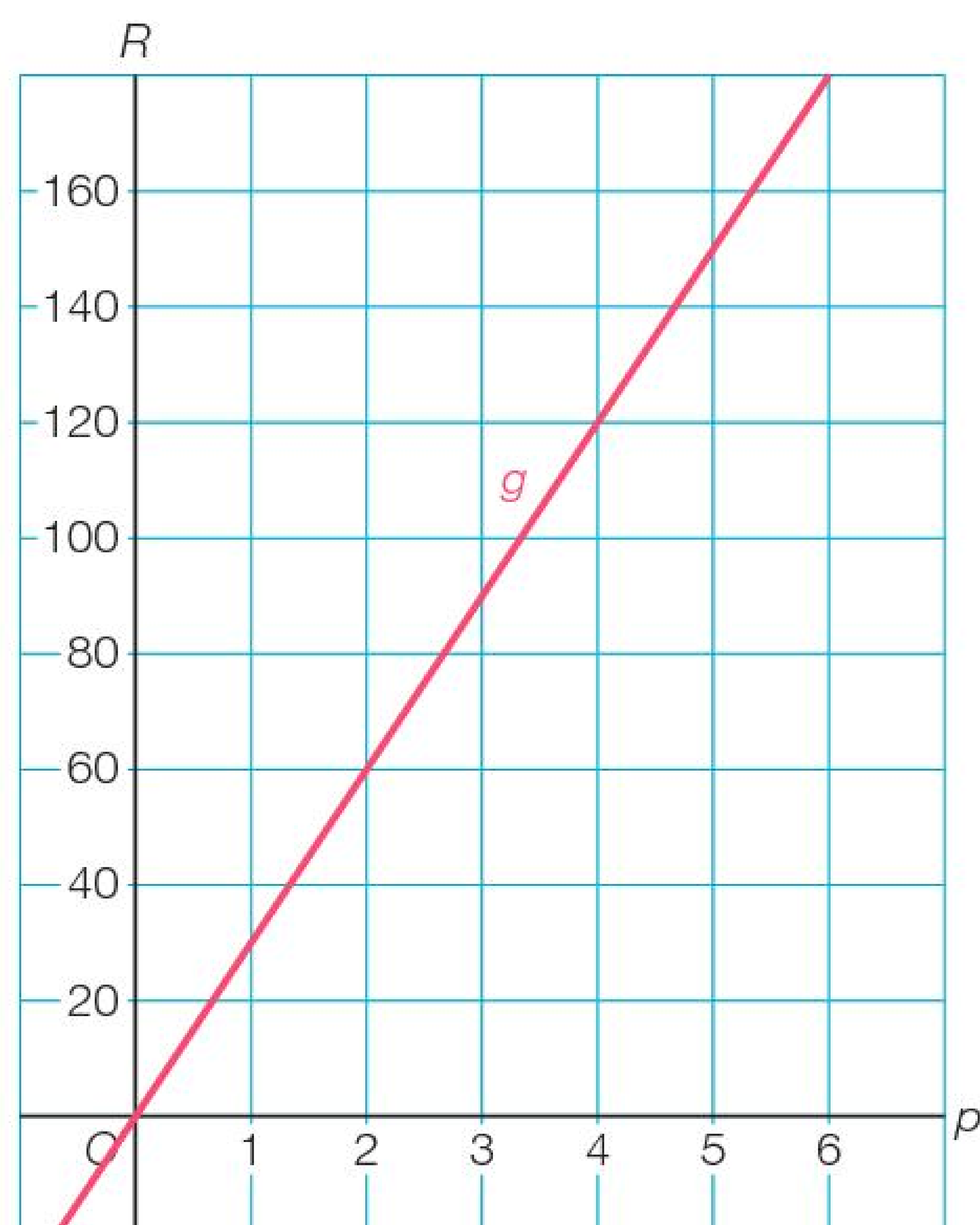

**a** Stel van lijn $p$ de formule op.
**b** Stel de formule op van lijn $q$.

**12** In het assenstelsel is de $t$-as de horizontale as en de $A$-as de verticale as.
Daarom heeft lijn $l$ een formule van de vorm $A = at + b$.
Stel de formule op van $l$.




**13** **a** Stel van lijn $h$ de formule op.
**b** Stel de formule op van lijn $g$.



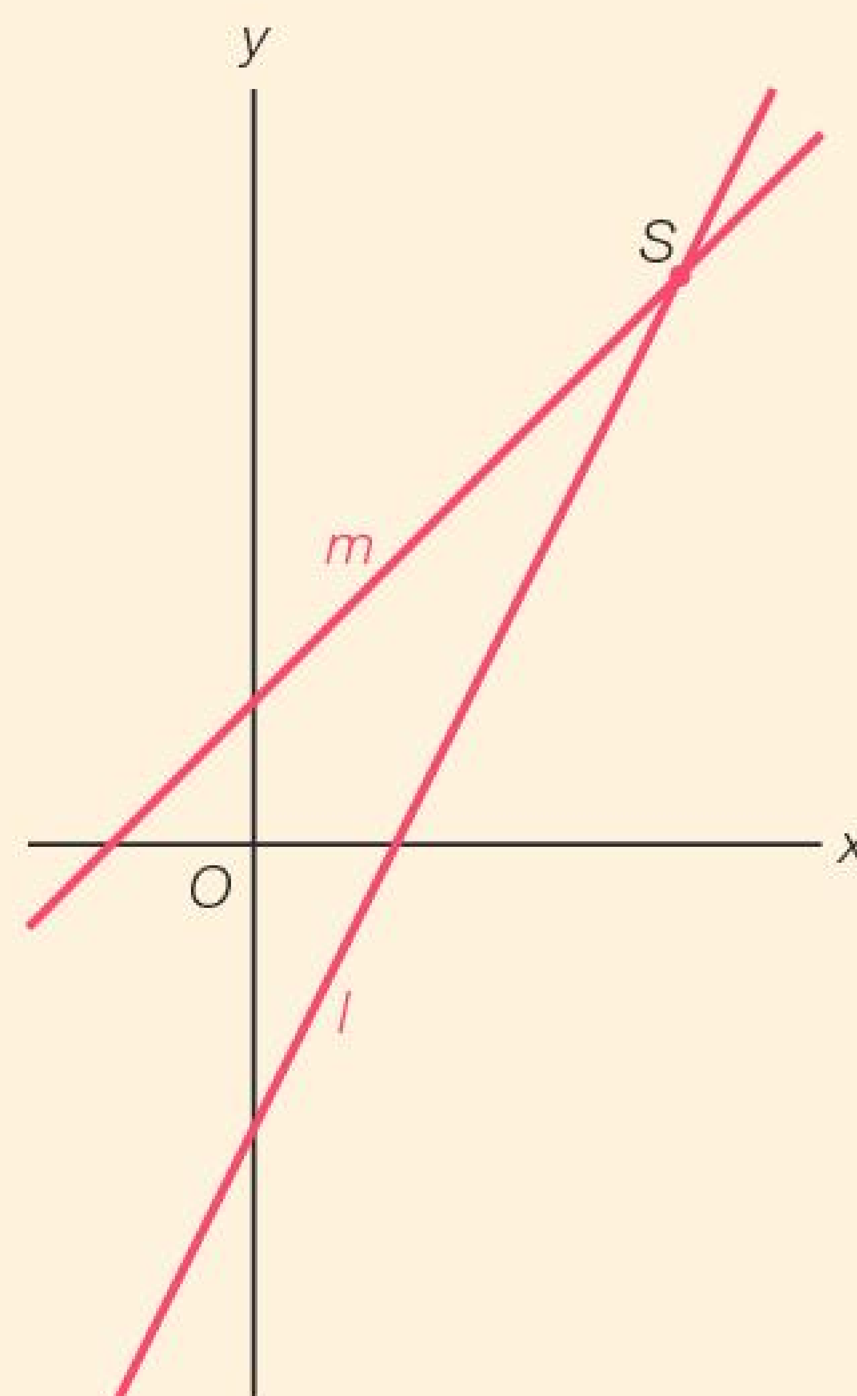



## Theorie B Coördinaten snijpunt berekenen

In de figuur bij het voorbeeld zie je de lijnen $l$: $y = 2x - 4$ en $m$: $y = x + 2$.
Je kunt de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen berekenen.

### Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt $S$ van de lijnen $l$: $y = 2x - 4$ en $m$: $y = x + 2$.




*Uitwerking*

$2x - 4 = x + 2$
$2x - x = 2 + 4$
$x = 6$
$x = 6$ invullen in $y = x + 2$ geeft $y = 6 + 2 = 8$.
Dus $S(6, 8)$.

**14** Bereken de coördinaten van het snijpunt $S$ van de lijnen $l$: $y = 4x + 3$ en $m$: $y = 3x - 1$.

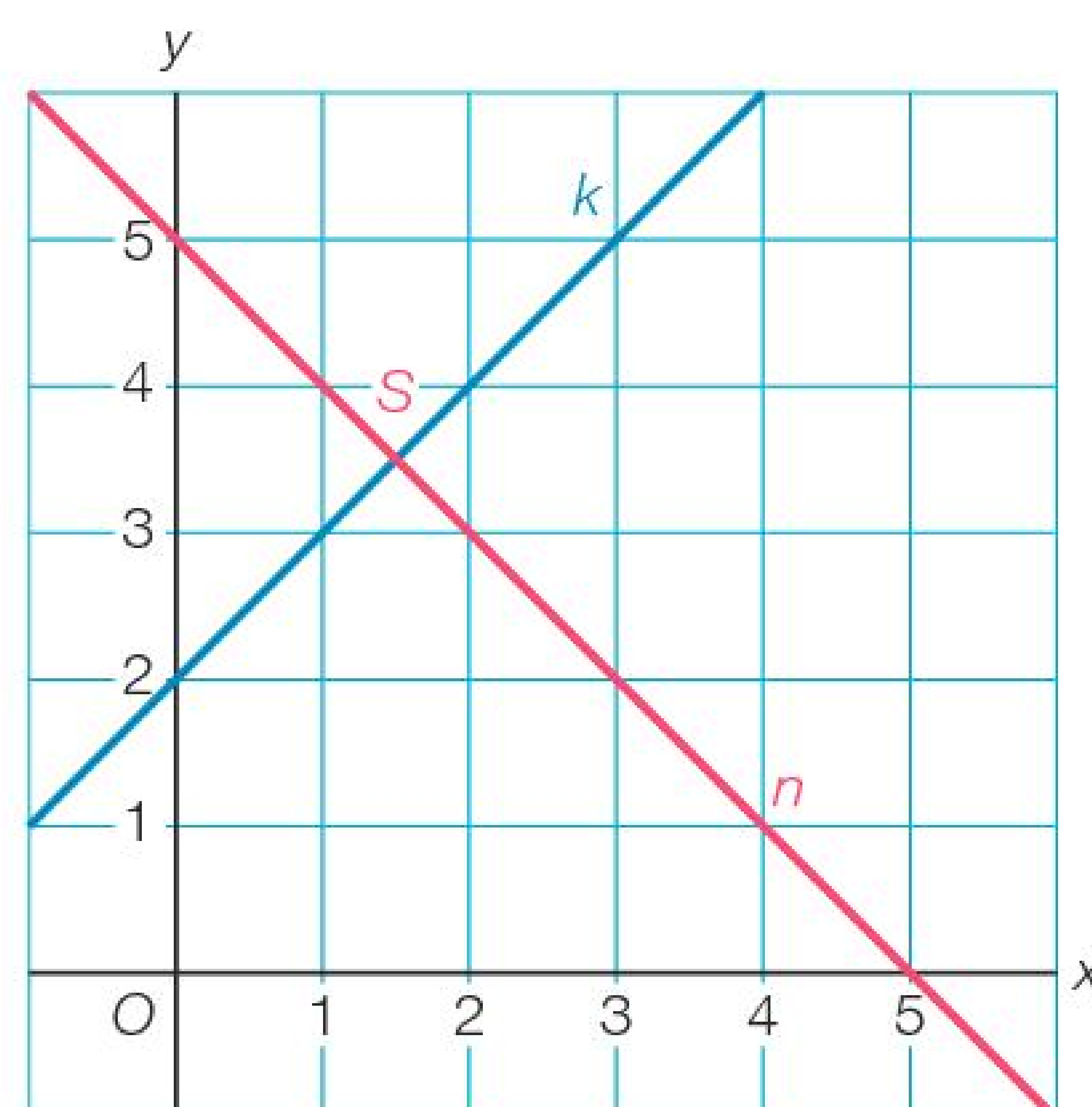
**15** Bereken de coördinaten van het snijpunt $T$ van de lijnen $k$: $y = -3x + 3$ en $l$: $y = x - 9$.

**16** Bereken de coördinaten van het snijpunt $S$ van de lijnen $m$: $y = 5x - 1$ en $n$: $y = x - 17$.

**17** Bereken de coördinaten van het snijpunt $T$ van de lijnen $a$: $y = -4x + 8$ en $b$: $y = -x - 7$.

**18** Bereken de coördinaten van het snijpunt $P$ van de lijnen $l$: $y = x$ en $m$: $y = -\frac{1}{2}x - 6$.

**19** Bereken de coördinaten van het snijpunt $S$ van de lijnen $k$ en $n$ in de figuur hiernaast.



# 4 [HAVO-B/MBO] Lineaire functies

## Theorie A Functies

Yasmine bezorgt maaltijden. Zij krijgt voor elke maaltijd die ze bezorgt € 1,50 en elke maand een vast bedrag van € 25. Als je weet hoeveel maaltijden Yasmine in een maand bezorgd heeft, reken je met een vast voorschrift uit hoeveel Yasmine verdiend heeft. Het aantal maaltijden wordt gebruikt als **invoer**.
Als Yasmine 20 maaltijden in een maand bezorgt, verdient zij 20 × 1,50 + 25 = € 55.
Na het toepassen van het voorschrift eerst keer 1,50 en dan plus 25 komen de verdiensten eruit als **uitvoer**. Dit noemen we een **functie**.

**Een functie maakt volgens een vast voorschrift van een invoer een ander getal, de uitvoer.**

**1** Faroek berekent zijn inkomen als volgt.
Hij krijgt € 6,50 per uur en € 12,50 als onkostenvergoeding.
- **a** Neem als invoer 5 en bereken de uitvoer.
- **b** Bereken de uitvoer die hoort bij de invoer 8.

**2** Dorien werkt voor hetzelfde bedrijf als Farouk. Zij krijgt € 7,50 per uur en € 13,50 als onkostenvergoeding.
- **a** Neem als invoer 8 en bereken de uitvoer.
- **b** Bereken de uitvoer die hoort bij de invoer 12.

## Theorie B Functievoorschrift

Een functie heeft meestal een naam. Vaak is dat de letter $f$, $g$, $h$ of $k$.
De formule $y = 2x - 16$ komt op hetzelfde neer als de functie $f(x) = 2x - 16$.
Neem je als invoer 4 dan krijg je als uitvoer $2 \cdot 4 - 16 = -8$.
We zeggen: Bij de functie $f$ is de **functiewaarde** van 4 gelijk aan −8.
Notatie: $f(4) = -8$.
We noemen $f(x) = 2x - 16$ het **functievoorschrift** van de functie $f$.

## Voorbeeld

De functies $f$ en $g$ hebben als functievoorschrift $f(x) = -3x + 6$ en $g(x) = 7x + 8$.

**a** Bereken $f(4)$ en $g(-9)$.

**b** De functie $h$ is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van $h$ op. Herleid je antwoord.

*Uitwerking*

a $f(4) = -3 \cdot 4 + 6 = -6$
$g(-9) = 7 \cdot -9 + 8 = -55$

b $h(x) = -3x + 6 + 7x + 8 = 4x + 14$

**3** Gegeven zijn de functies $f(x) = -5x - 10$ en $g(x) = -2x + 12$.

**a** Bereken $f(2)$, $f(-4)$ en $f(10)$.

**b** Bereken $g(-6)$, $g(-1)$ en $g(100)$.

**c** Bereken $f(4) + g(4)$.

**d** De functie $h$ is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van $h$ op. Herleid je antwoord.

**4** Gegeven zijn de functies $f(x) = -10x$ en $g(x) = 10 - 3x$.

**a** Bereken $f(2)$, $f(-5)$ en $f(12)$.

**b** Bereken $g(6)$, $g(-4)$ en $g(15)$.

**c** Bereken bij de functie $g$ de functiewaarde van $-15$.

**d** De functie $h$ is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van $h$ op. Herleid je antwoord.

## Theorie C De grafiek van een lineaire functie tekenen

Bij de functie $f(x) = 5x + 8$ hoort de formule $y = 5x + 8$.
Net als bij een formule kun je bij een functie een tabel maken en een grafiek tekenen.

De grafiek van $f(x) = 2x - 6$ is de lijn met formule $y = 2x - 6$.
Omdat $f(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$ ligt het punt (5, 4) op de grafiek van $f$.
De functie $f(x) = 2x - 6$ is een voorbeeld van een **lineaire functie**.

**Een functie $f$ van de vorm $f(x) = ax + b$ is een lineaire functie.**
**De grafiek van een lineaire functie is een lijn.**

## Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -2x + 1$.

**a** Teken de grafiek van $f$.

**b** Onderzoek of het punt $P(8, -15)$ op de grafiek van $f$ ligt.

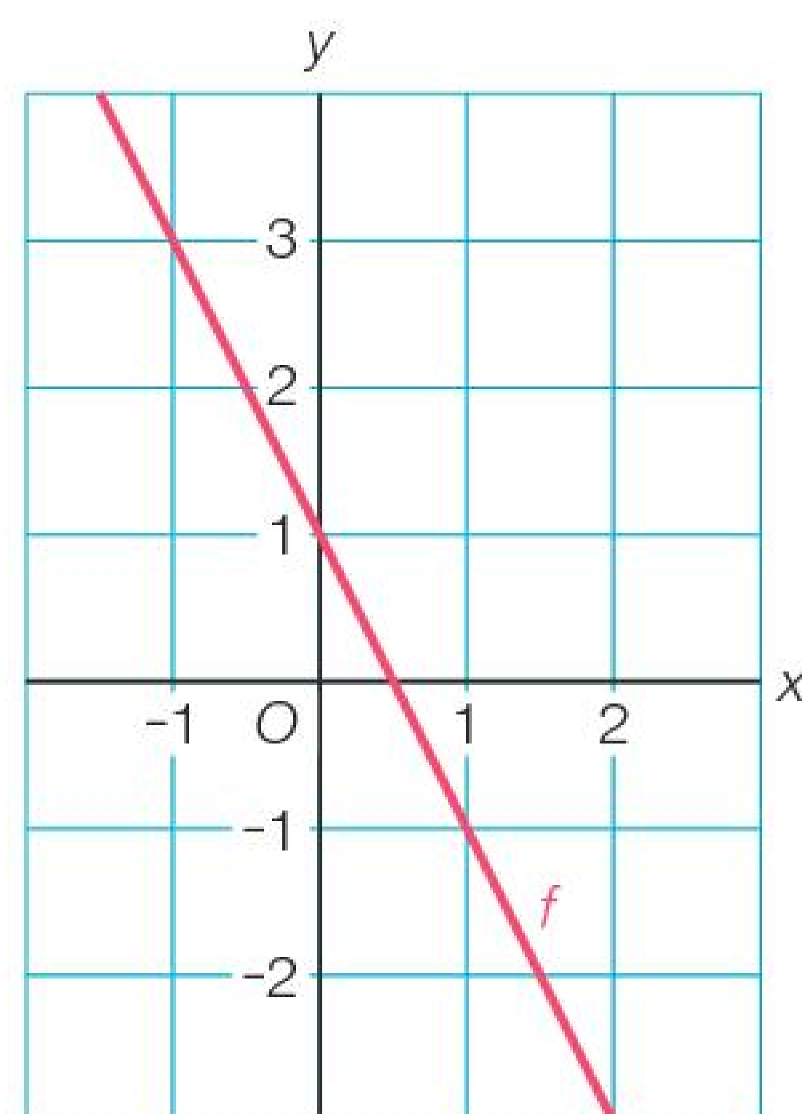
**c** Van het punt $Q$ op de grafiek van $f$ is de $y$-coördinaat $y_Q = -23$. Bereken de $x$-coördinaat $x_Q$ van $Q$.

*Uitwerking*

**a**

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | -3 |

Zie de grafiek hiernaast.




**b** $f(8) = -2 \cdot 8 + 1 = -15$

Dus $P$ ligt op de grafiek van $f$.

**c** $-2x + 1 = -23$

$-2x = -23 - 1$

$-2x = -24$

$x = 12$

Dus $x_Q = 12$.

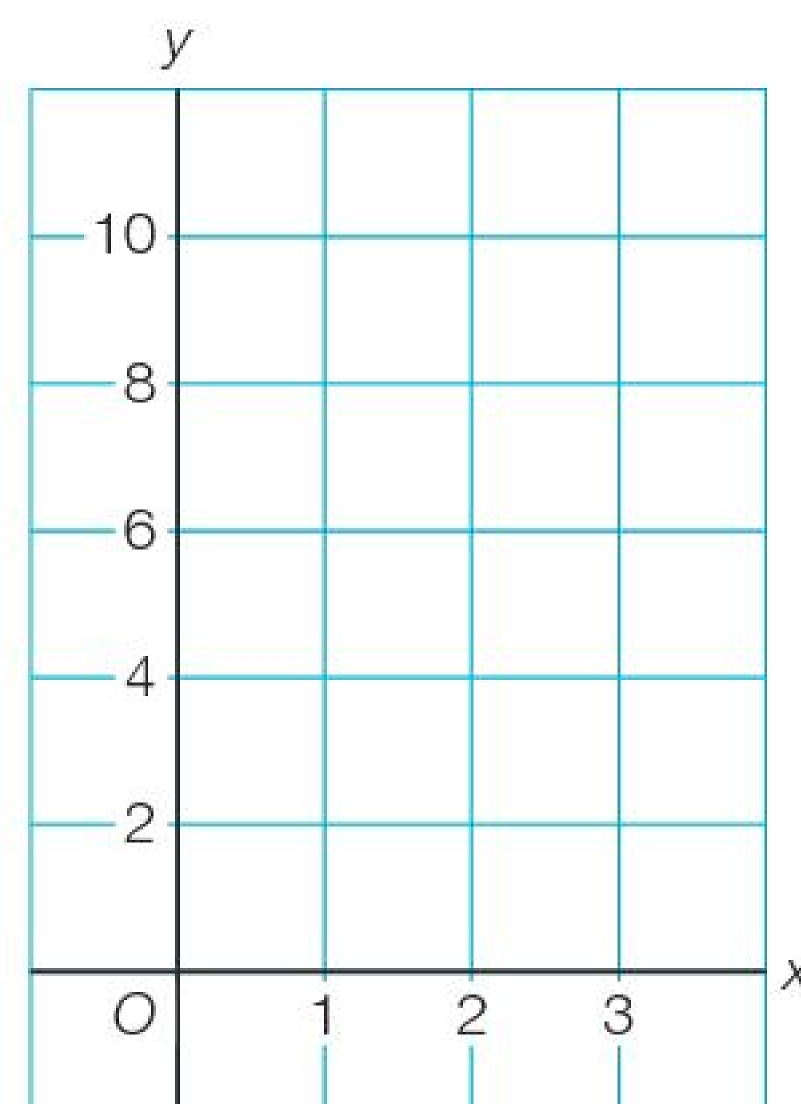
**5** Gegeven is de functie $g(x) = 3x + 2$.

**a** Bereken $g(1)$ en $g(6)$.

**b** Teken hiernaast de grafiek van $g$.

**c** Onderzoek of het punt $Q(5, 17)$ op de grafiek van $g$ ligt.

**d** Het punt $R$ heeft een $y$-coördinaat van 29. Bereken de $x$-coördinaat $x_R$ van $R$.



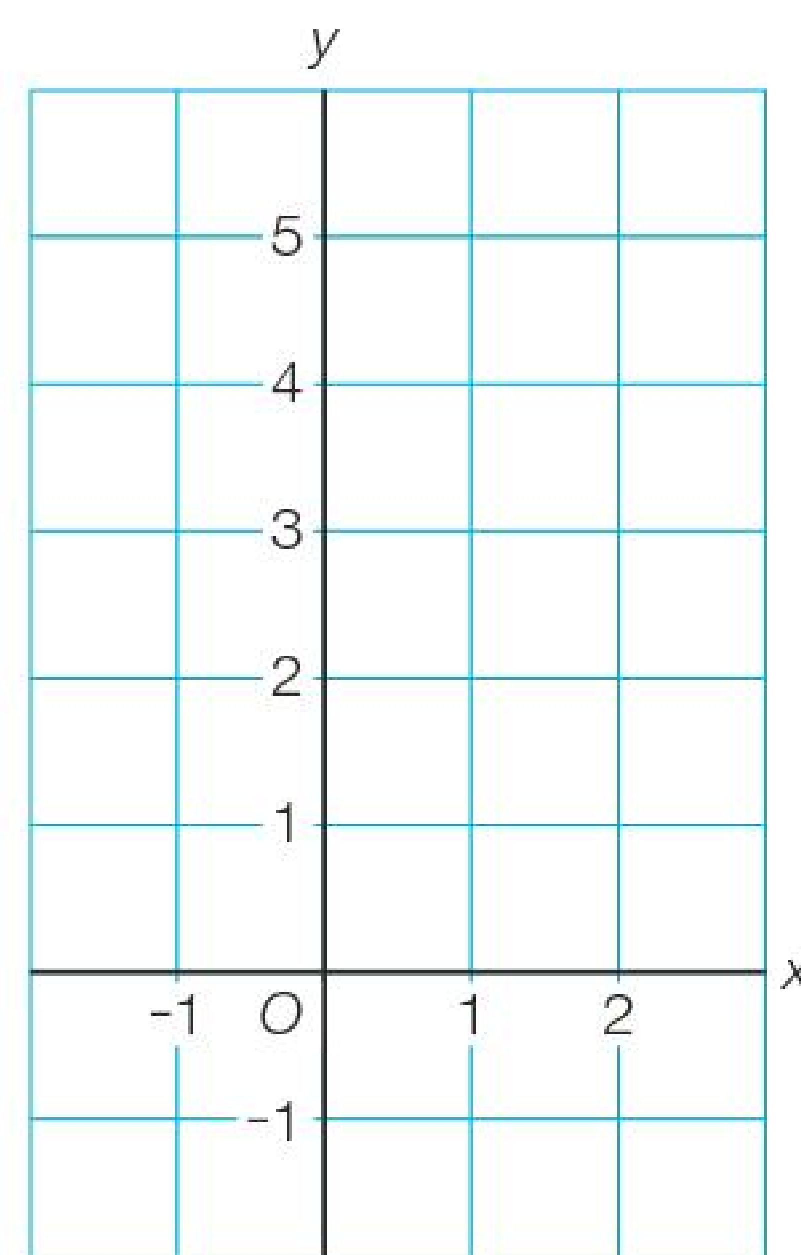
**6** Gegeven zijn de functies $h(x) = 2x + 3$ en $k(x) = -4x + 2$.

**a** Teken in het assenstelsel hiernaast de grafieken van $h$ en $k$.

**b** Bereken $h(-1\frac{1}{2})$.

**c** Bereken $k(\frac{1}{2})$.

**d** De functie $g$ gegeven door $g(x) = h(x) + k(x)$. Stel het functievoorschrift van $g$ op en herleid je antwoord tot de vorm $g(x) = ax + b$.




## Theorie D **Snijpunten met de *x*-as en de *y*-as**

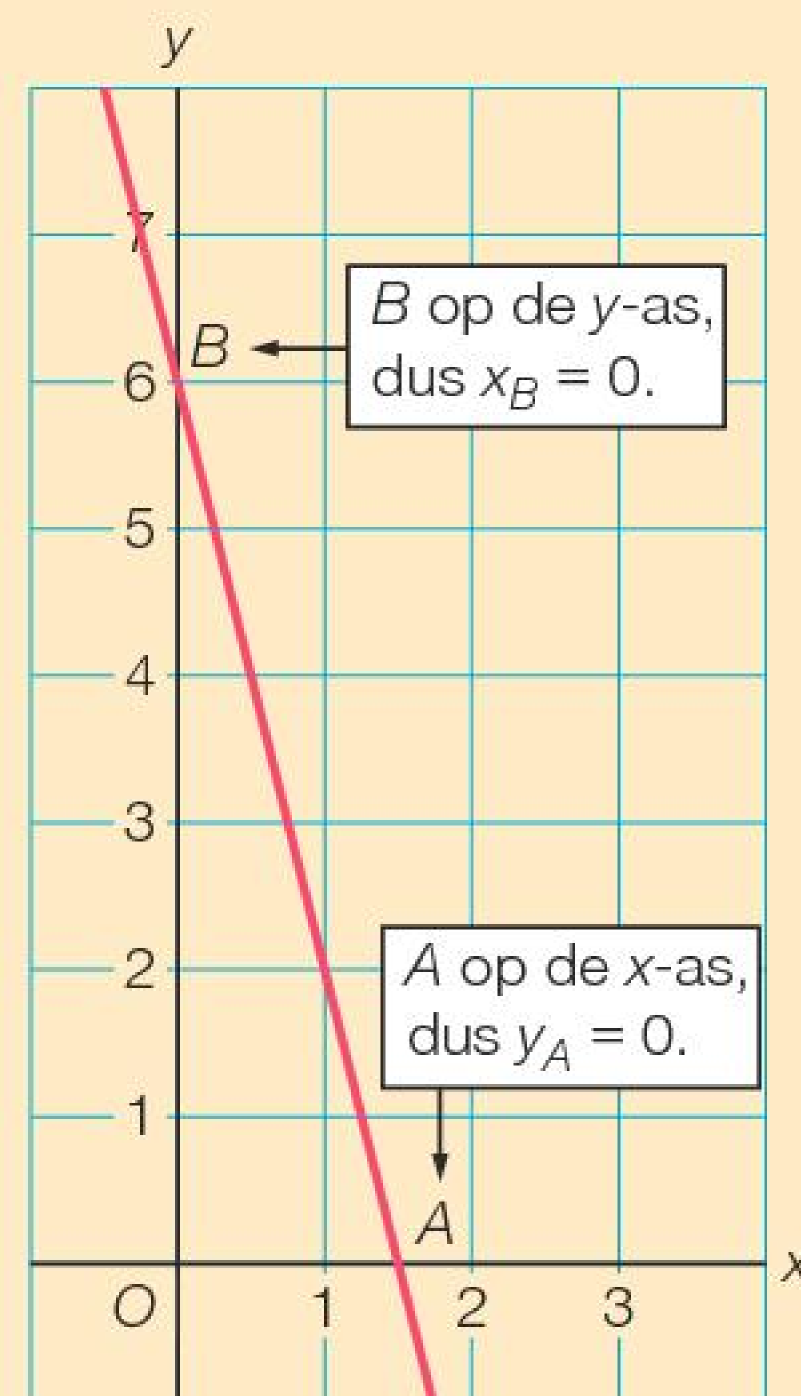
Gegeven is de functie $f(x) = -4x + 6$.
De grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $B$.
Dus de $x$-coördinaat van $B$ is 0.
De $y$-coördinaat volgt uit $y_B = f(0) = -4 \cdot 0 + 6 = 6$, dus $B(0, 6)$.
De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $A$, dus de $y$-coördinaat van $A$ is 0.
De $x$-coördinaat volgt uit $y_A = 0$, dus uit $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ geeft $-4x + 6 = 0$

$-4x = -6$

$x = 1\frac{1}{2}$

Dus $A(1\frac{1}{2}, 0)$.




**Voor de grafiek van de functie $f$ geldt**

| | |
|---|---|
| **snijpunt met de $x$-as** | **de $y$-coördinaat is 0** |
| | **de $x$-coördinaat volgt uit $f(x) = 0$** |
| **snijpunt met de $y$-as** | **de $x$-coördinaat is 0** |
| | **de $y$-coördinaat volgt uit $f(0)$** |

## Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -5x + 10$.
De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $A$ en de $y$-as in het punt $B$.
Bereken de coördinaten van $A$ en $B$.

*Uitwerking*

$f(x) = 0$ geeft $-5x + 10 = 0$
$-5x = -10$
$x = 2$
Dus $A(2, 0)$.
$f(0) = 10$, dus $B(0, 10)$.

**7** Gegeven is de functie $f(x) = -2x + 8$.
De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $P$ en de $y$-as in het punt $Q$.
Bereken de coördinaten van $P$ en $Q$.

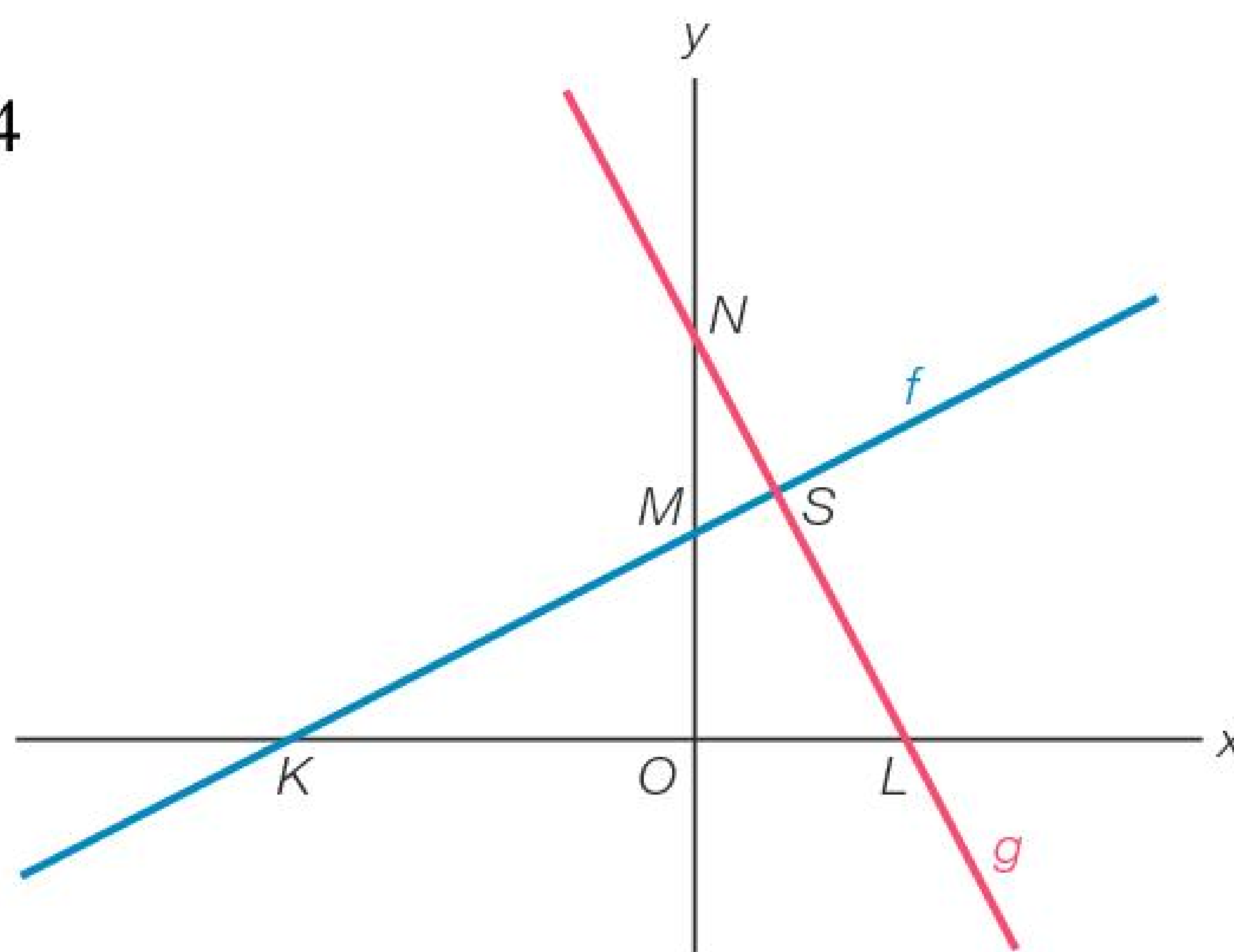
**8** Gegeven is de functie $g(x) = -4x - 4$.
De grafiek van $g$ snijdt de $x$-as in het punt $S$ en de $y$-as in het punt $T$.
Bereken de coördinaten van $S$ en $T$.

**9** Hiernaast zie je een schets van de grafieken van de functies $f(x) = 0{,}4x + 4$ en $g(x) = -1{,}6x + 5$.

**a** Bereken de coördinaten van de punten $K$, $L$, $M$ en $N$.

**b** Bereken de coördinaten van het snijpunt $S$.

**c** De functie $h$ is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Geef het functievoorschrift van $h$ in de vorm $h(x) = ax + b$.



# 5 [HAVO-B] Lineaire vormen

## 5.1 Formules opstellen

### Theorie A Punt op een lijn

In het voorbeeld is gegeven dat het punt $A(3, -4)$ op lijn $m$: $y = -2x + b$ ligt. Je kunt dan $b$ berekenen.

Voorbeeld

Het punt $A(3, -4)$ ligt op lijn $m$: $y = -2x + b$.
Bereken $b$ en schrijf de formule van $m$ op.

*Uitwerking*

$$\left.\begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ A(3, -4) \text{ op } m \end{array}\right\} -2 \cdot 3 + b = -4$$

$$-6 + b = -4$$

$$b = 2$$

Dus $m$: $y = -2x + 2$.

**1** Het punt $A(-3, 5)$ ligt op lijn $l$: $y = 3x + b$.
Vul in.

$$\left.\begin{array}{l} l: y = 3x + b \\ A(-3, 5) \text{ op } l \end{array}\right\} 3 \cdot \ldots\ldots + b = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + b = \ldots\ldots$$

$$b = \ldots\ldots$$

Dus $l$: $y = 3x + \ldots\ldots$

**2** De lijn $m$: $y = -\frac{1}{2}x + b$ gaat door het punt $B(-4, 8)$.
Bereken $b$ en schrijf de formule op.

**3** Het punt $Q(1, 3)$ ligt op lijn $p$: $y = -5x + b$.
Schrijf de formule op van $p$.

## Theorie B Formule opstellen bij evenwijdige lijnen

De lijnen $p$: $y = 3x + 2$ en $q$: $y = 3x - 7$ zijn **evenwijdig** omdat ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben, want $rc_p = rc_q = 3$. Dit gebruik je om de formule op te stellen van een lijn die evenwijdig is met een gegeven lijn.

### Voorbeeld

De lijn $l$ is evenwijdig met lijn $m$: $y = 7x - 3$ en gaat door het punt $D(2, 8)$. Stel de formule van $l$ op.

*Uitwerking*

$l$: $y = ax + b$ is evenwijdig met $m$, dus $a = 7$.

$$\left.\begin{array}{l} l: y = 7x + b \\ D(2, 8) \text{ op } l \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 2 + b = 8 \\ 14 + b = 8 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $l$: $y = 7x - 6$.

**4** De lijn $k$ is evenwijdig met lijn $l$: $y = 4x + 2$ en gaat door het punt $P(-3, 5)$. Vul in.

$k$: $y = ax + b$ is evenwijdig met ........, dus $a =$ ........

$k$: $y =$ ........ $x + b$
$P($........, ........$)$ op ........ } ........ · ........ $+ b =$ ........

........ $+ b =$ ........

$b =$ ........

Dus $k$: ........................

**5** De lijn $q$ gaat door het punt $S(6, -5)$ en is evenwijdig met de lijn $r$: $y = -1\frac{1}{2}x + 12$.
Stel de formule van $q$ op.

**6** Stel de formule op van de lijn $l$ die evenwijdig is met de lijn $m$: $y = 5x + 9$ en gaat door het punt $B(6, 13)$.

**7** Stel de formule op van de lijn $p$ die evenwijdig is met de lijn $q$: $y = -3x + 15$ en gaat door het punt $Q(-4, 7)$.

# 5.2 Lineaire ongelijkheden

## Theorie A Vergelijkingen met breuken

Komen in een vergelijking breuken voor, dan werk je eerst die breuken weg. Vermenigvuldig daarvoor alle termen met een geschikt getal.

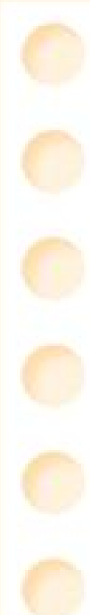
### Voorbeeld

Los op.

**a** $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}x$

**b** $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{7}{10}x + 4$

*Uitwerking*



**a** $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}x$ alles keer 6
$3x + 6 = 2x$
$3x - 2x = -6$
$x = -6$

**b** $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{7}{10}x + 4$ alles keer 10
$4x + 10 = 7x + 40$
$4x - 7x = 40 - 10$
$-3x = 30$
$x = -10$

**8** Los op.

**a** $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 2$

**b** $\frac{1}{5}a = \frac{1}{2}a - 6$

**c** $\frac{1}{5}y = -y + 6$

**d** $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 2$

**e** $\frac{2}{5}x + 2 = -\frac{3}{5}$

**f** $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{5}x + 5$

## Theorie B Lineaire ongelijkheden

Bij de firma FietsenMaar en de firma GoElectro kun je e-bikes huren. Voor de huurprijs van een e-bike hanteren de firma's de volgende formules.
FietsenMaar $h = 12t + 5$
GoElectro $h = 10t + 15$
Hierin is $h$ de *huurprijs* in euro's en $t$ de *tijd* in dagen.
Je kunt hierbij de vraag stellen:
Bij welk aantal dagen huren is FietsenMaar voordeliger dan GoElectro?
Je kunt ook vragen:
Voor welke $t$ is $12t + 5 < 10t + 15$?
De vorm $12t + 5 < 10t + 15$ is een voorbeeld van een **lineaire ongelijkheid**.

Een lineaire ongelijkheid kun je oplossen door deze stap voor stap eenvoudiger te maken, net als bij lineaire vergelijkingen, namelijk:

| | |
|---|---|
| $12t + 5 < 10t + 15$ | termen met $t$ naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid |
| $12t - 10t < 15 - 5$ | termen samennemen |
| $2t < 10$ | deel links en rechts door het getal voor $t$ |
| $t < 5$ | |

Dus firma FietsenMaar is bij minder dan vijf dagen huren voordeliger dan firma GoElectro.

**Voorbeeld**

Los op $6(a - 4) > 5(a - 3) + 5$.

*Uitwerking*

| | |
|---|---|
| $6(a - 4) > 5(a - 3) + 5$ | werk de haakjes weg |
| $6a - 24 > 5a - 15 + 5$ | termen met $a$ naar links, de rest naar rechts |
| $6a - 5a > -15 + 5 + 24$ | herleid beide leden |
| $a > 14$ | |

**9** Los op.

**a** $5x - 10 < 4x + 6$

**b** $4q > 3(7 + q)$

**c** $4(x - 1) > 5 - 3(2 - x)$

**d** $2(a + 5) < a - 100$

**10** Los op.

**a** $12(x - 6) > -3(x - 1)$

**b** $\frac{1}{5}x - 2 > \frac{1}{6}x + 3$

**c** $6(3p + 16) < 2p$

## Theorie C Het teken > of < omklappen

De ongelijkheid $5 < 6$ kun je op verschillende manieren bewerken.

| | |
|---|---|
| $5 + 2 < 6 + 2$ | Je kunt aan beide kanten iets optellen. De ongelijkheid klopt. |
| $5 - 2 < 6 - 2$ | Je kunt van beide kanten iets afhalen. De ongelijkheid klopt. |
| $5 \cdot 2 < 6 \cdot 2$ | Je kunt beide kanten vermenigvuldigen met een positief getal. De ongelijkheid klopt. |
| $5 \cdot -2 > 6 \cdot -2$ | Je kunt beide kanten vermenigvuldigen met een negatief getal. De ongelijkheid klopt alleen als het teken omgeklapt wordt. |
| $5 : -2 > 6 : -2$ | Je kunt beide kanten delen door een negatief getal. De ongelijkheid klopt alleen als het teken omgeklapt wordt. |

Je mag beide kanten van een ongelijkheid met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen. Als dat getal negatief is, moet je **het ongelijkheidsteken < of > omklappen**.

### Voorbeeld

Los op.

**a** $4x - 4 > 7x + 20$

**b** $2(x - 2) < 3(x - 1) + 1$

*Uitwerking*

**a** $4x - 4 > 7x + 20$ — termen met $x$ naar links, rest naar rechts
$4x - 7x > 20 + 4$ — herleid beide leden
$-3x > 24$ — deel door $-3$, dus het ongelijkheidsteken klapt om
$x < -8$

**b** $2(x - 2) < 3(x - 1) + 1$ — werk de haakjes weg
$2x - 4 < 3x - 3 + 1$ — termen met $x$ naar links, rest naar rechts
$2x - 3x < -3 + 1 + 4$ — termen samennemen
$-x < 2$ — deel door $-1$, dus het ongelijkheidsteken klapt om
$x > -2$

**11** Vul in.

**a** $-3x < 18$

$x$ ........ $-6$

**b** $3x > -6$

$x$ ........ $-2$

**c** $-6x < 0$

$x$ ........ $0$

**12** Los op.

**a** $7x + 8 > 11x + 20$

**b** $3(x - 2) > 5(x - 2)$

**c** $-3x < 2x - 5$

**d** $x - 3 < x - (2 + 2x)$

**13** Los op.

**a** $5x > 11x + 6$

**b** $\frac{1}{2}x < 2x + 9$

**c** $6 - 2(x - 3) < -(x - 8) + 1$

**d** $7x + 9 > 8(x - 2) + 6$

# 6 [HAVO-B/MBO] Algebra deel 2

## 6.1 Wortels

### Theorie A Het kwadraat van een wortel

Van een vierkant met oppervlakte 5 $m^2$ is de zijde $\sqrt{5}$ m, dus $(\sqrt{5})^2 = 5$.

**Het kwadraat van $\sqrt{a}$ is $a$, dus $(\sqrt{a})^2 = a$.**

Omdat $(ab)^2 = a^2b^2$ is $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$.
En zo is $(-5\sqrt{7})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 7 = 175$, maar $-5(\sqrt{7})^2 = -5 \cdot 7 = -35$.

Voorbeeld

Bereken.

**a** $(3\sqrt{7})^2$

**b** $-2(\sqrt{6})^2$

*Uitwerking*

**a** $(3\sqrt{7})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$

**b** $-2(\sqrt{6})^2 = -2 \cdot 6 = -12$

**1** Bereken.

**a** $(\sqrt{15})^2 =$ ..........

**b** $-(\sqrt{21})^2 =$ ..........

**c** $(\sqrt{40})^2 =$ ..........

**d** $(3\sqrt{8})^2 =$ ..........

**2** Bereken.

**a** $(-3\sqrt{7})^2 =$ ..........

**b** $-5\sqrt{25} - 4(\sqrt{3})^2 =$ ..........

**c** $-7(\sqrt{2})^2 =$ ..........

**d** $(\sqrt{12})^2 - 2^2 =$ ..........

## Theorie B Gelijksoortige wortels

Zoals je $5p + 4p$ kunt herleiden tot $9p$, kun je $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ herleiden tot $7\sqrt{3}$.
We noemen $2\sqrt{3}$ en $5\sqrt{3}$ **gelijksoortige wortels**.
Wortels zoals $2\sqrt{3}$ en $3\sqrt{5}$ zijn niet gelijksoortig.
Je kunt $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ niet herleiden.
Ook $7 + \sqrt{3}$ kun je niet herleiden.

**De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden.**
**Zo is $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$ en $\sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.**

### Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
**b** $9\sqrt{10} - 5\sqrt{10}$
**c** $3\sqrt{3} + \sqrt{6}$
**d** $\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

*Uitwerking*

a $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
b $9\sqrt{10} - 5\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$
c $3\sqrt{3} + \sqrt{6}$ *kan niet*
d $\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$

**3** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $3\sqrt{13} + \sqrt{13}$ ..........
**b** $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ ..........
**c** $7\sqrt{15} + 4\sqrt{15}$ ..........
**d** $2\sqrt{2} - 11\sqrt{3}$ ..........
**e** $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ ..........
**f** $\sqrt{23} + \sqrt{23}$ ..........
**g** $3\sqrt{11} + 3\sqrt{11}$ ..........
**h** $2\sqrt{6} - 5$ ..........

**4** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $5\sqrt{8} + 12\sqrt{8}$ ..........
**b** $(-2\sqrt{12})^2$ ..........
**c** $5\sqrt{15} - 4\sqrt{15}$ ..........
**d** $9\sqrt{20} - 11\sqrt{20}$ ..........
**e** $(\sqrt{17})^2 - 4^2$ ..........
**f** $5\sqrt{13} - 12\sqrt{3}$ ..........

## Theorie C Wortels vermenigvuldigen

Voor het vermenigvuldigen van wortels geldt de volgende regel.

$5 \cdot 3 = 15$

$5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{7} = 15\sqrt{21}$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$

$$\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{pq}$$

Dus $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{7} = 6\sqrt{35}$ en $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$.

**Afspraak**
Bij het herleiden laat je wortels zoals $\sqrt{11}$ en $24\sqrt{10}$ in het antwoord staan.
Maar wortels als $3\sqrt{4}$ herleid je, want $3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3}$

**b** $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

**c** $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

**d** $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

*Uitwerking*

a $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{6}$

b $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

c $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 3\sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$

d $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$

**5** Herleid.

**a** $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} =$ ……………………………………………

**b** $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} =$ ……………………………………………

**c** $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$ ……………………………………………

**d** $8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} =$ ……………………………………………

**e** $2\sqrt{11} \cdot 9\sqrt{11} =$ ……………………………………………

**f** $-12 \cdot 4\sqrt{13} =$ ……………………………………………

**6** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $6\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$ ..........

**b** $12\sqrt{17} + 17$ ..........

**c** $2(-5\sqrt{3})^2$ ..........

**d** $6\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{5}$ ..........

**e** $9\sqrt{13} - 3\sqrt{13}$ ..........

**f** $-3\sqrt{36} + 2(\sqrt{7})^2$ ..........

## Theorie D Factor voor het wortelteken brengen

Wortels zoals $\sqrt{4}$ en $\sqrt{36}$ kun je herleiden omdat er onder het wortelteken een kwadraat staat. Maar ook wortels zoals $\sqrt{20}$ kun je herleiden.
Je gebruikt hierbij dat $20 = 4 \cdot 5$, dus $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
En zo is $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.
We zeggen dat er een **factor voor het wortelteken** is gebracht.
Om een factor voor het wortelteken te brengen, heb je een kwadraat nodig.
Bij $\sqrt{30}$ lukt het niet om een factor voor het wortelteken te brengen, want $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ en bij de factoren 2, 3, 5, 6, 10 en 15 zit geen kwadraat.

Soms zijn er meerdere mogelijkheden om een factor voor het wortelteken te brengen, zoals bij $\sqrt{32}$.
$32 = 4 \cdot 8$, dus $\sqrt{32} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$, maar ook is
$32 = 16 \cdot 2$, dus $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
In het laatste geval is *een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken gebracht.*

**Afspraak**
Bij de opdracht *herleid* breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

### Voorbeeld

Herleid.

**a** $\sqrt{175}$ **b** $\sqrt{44}$ **c** $\sqrt{80}$

*Uitwerking*

a $\sqrt{175} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$
b $\sqrt{44} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$
c $\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

**7** Herleid.

**a** $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} =$ ..........

**b** $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{\ldots} =$ ..........

**c** $\sqrt{150} =$ ..........

**d** $\sqrt{54} =$ ..........

**e** $\sqrt{63} =$ ..........

**f** $\sqrt{72} =$ ..........

**8** Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

**a** $\sqrt{45}$ ..........

**b** $(3\sqrt{11})^2$ ..........

**c** $8\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ ..........

**d** $12\sqrt{17} - 5\sqrt{7}$ ..........

**e** $7\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{7}$ ..........

**f** $\sqrt{108}$ ..........

**g** $-3\sqrt{49} + 2(\sqrt{6})^2$ ..........

**h** $5\sqrt{16} - 3\sqrt{9}$ ..........

**i** $9 + (2\sqrt{15})^2 - 4^2$ ..........

**j** $5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{24}$ ..........

**k** $14\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ ..........

**l** $\sqrt{27}$ ..........

**m** $3(\sqrt{5})^2 - \sqrt{81}$ ..........

**n** $-4\sqrt{16} + (\sqrt{16})^2$ ..........

# 6.2 Merkwaardige producten

## Theorie A Het merkwaardige product $(a + b)(a - b)$

Bij het herleiden van het product $(a + b)(a - b)$ gebeurt iets merkwaardigs. Er blijven maar twee termen over. Kijk maar.
$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

**merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$**

Dus $(a + 4)(a - 4) = a^2 - 4^2 = a^2 - 16$.
Je mag bij het herleiden van een merkwaardige product het antwoord in één keer opschrijven. Zo is $(c - 3)(c + 3) = c^2 - 9$ en $(5x + 9)(5x - 9) = 25x^2 - 81$.

Het kwadraat van $5x$ is $(5x)^2 = 5x \cdot 5x = 25x^2$.

**9** Herleid

**a** $(x + y)(x - y) =$ ..................

**b** $(a + 7)(a - 7) =$ ..................

**c** $(b - 9)(b + 9) =$ ..................

**d** $(3a + 2)(3a - 2) =$ ..................

**e** $(5x - 6)(5x + 6) =$ ..................

**f** $(8y + 1)(8y - 1) =$ ..................

## Theorie B De merkwaardige producten $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$

Bij het herleiden van $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$ houd je in het antwoord drie termen over.
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$, dus
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$, dus
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Omdat $ab$ het product is van $a$ en $b$ heet $2ab$ het **dubbelproduct** van $a$ en $b$.

**Merkwaardige producten**
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ook bij het herleiden van de merkwaardige producten $(a+b)^2$ en $(a-b)^2$ laat je de tussenstappen weg. Je schrijft je antwoord in één keer op.

$(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

Het dubbelproduct van $a$ en 4 is $2 \cdot a \cdot 4 = 8a$.

## Voorbeeld

Herleid.

**a** $(a-5)^2$ **b** $(3x+6)^2$ **c** $(3a-4b)^2$

*Uitwerking*

**a** $(a-5)^2 = a^2 - 10a + 25$ het dubbelproduct van $a$ en 5 is $2 \cdot a \cdot 5 = 10a$

**b** $(3x+6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ $(3x)^2 = 9x^2$ en $2 \cdot 3x \cdot 6 = 36x$

**c** $(3a-4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$

$(3a)^2 = 9a^2$, $2 \cdot 3a \cdot 4b = 24ab$ en $(-4b)^2 = 16b^2$

**10** Herleid.

**a** $(p+5)^2 =$ ..................

**b** $(q-4)^2 =$ ..................

**c** $(x-1)^2 =$ ..................

**d** $(b+7)^2 =$ ..................

**e** $(e-3)^2 =$ ..................

**f** $(y+10)^2 =$ ..................

**g** $(a+9)^2 =$ ..................

**h** $(b+4)^2 =$ ..................

**i** $(7x+4y)^2 =$ ..................

**j** $(f-1)^2 =$ ..................

**k** $(3c+8)^2 =$ ..................

**l** $(5g-3)^2 =$ ..................

**11** Herleid.

**a** $(4x+9)^2 =$ ..................

**b** $(8x-3)^2 =$ ..................

**c** $(7a+2b)^2 =$ ..................

**d** $(5a+1)(5a-1) =$ ..................

**e** $(3-5a)^2 =$ ..................

**f** $(x+4y)^2 =$ ..................

**g** $(8x-y)(8x+y) =$ ..................

**h** $(p-5q)(p+5q) =$ ..................

# 6.3 Ontbinden in factoren

## Theorie A Ontbinden in factoren

Bij de herleiding $x(x + 7) = x^2 + 7x$ maak je van het **product** $x(x + 7)$ de **som** $x^2 + 7x$.

factoren $x$ en $x + 7$ | termen $x^2$ en $7x$

Het omgekeerde kan ook. Je schrijft de som $x^2 + 7x$ als het product $x(x + 7)$. Schrijven als een product heet **ontbinden in factoren**.

**Ontbinden in factoren betekent schrijven als een product.**

Bij $x^2 + 7x = x(x + 7)$ is de factor $x$ buiten haakjes gebracht. Dat kan omdat $x$ een factor is van $x^2$ en ook van $7x$. Daarom heet $x$ de **gemeenschappelijke factor** van $x^2$ en $7x$.

$x^2 = x \cdot x$
$7x = 7 \cdot x$
gemeenschappelijke factor $x$

Ook $15ab + 6c$ is te ontbinden in factoren. Van $15ab$ en $6c$ is 3 de gemeenschappelijke factor. Daarom breng je 3 buiten haakjes. Je krijgt $15ab + 6c = 3(5ab + 2c)$.

$15ab = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b$
$6c = 2 \cdot 3 \cdot c$
gemeenschappelijke factor 3

**Je ontbindt $2x^2 - 7x$ in factoren door de gemeenschappelijke factor $x$ buiten haakjes te brengen. Je krijgt $2x^2 - 7x = x(2x - 7)$.**

### Voorbeeld

Ontbind in factoren.

**a** $6a + 10b$
**b** $2ab - b$

Controle van vraag **b**
$b(2a - 1) = 2ab - b$
Klopt!

$6a = 2 \cdot 3 \cdot a$
$10b = 2 \cdot 5 \cdot b$
gemeenschappelijke factor 2

$2ab = 2 \cdot a \cdot b$
$b = 1 \cdot b$
gemeenschappelijke factor $b$

*Uitwerking*

**a** $6a + 10b = 2(3a + 5b)$
**b** $2ab - b = b(2a - 1)$

**12** Ontbind in factoren.

**a** $2x + 8y =$ ..........

**b** $4a - ab =$ ..........

**c** $x^2 + 20x =$ ..........

**d** $4p - 6 =$ ..........

**e** $pq + 3pr =$ ..........

**f** $x^2 - 9x =$ ..........

**g** $xy - 3yz =$ ..........

**h** $3a - abc =$ ..........

**i** $12p - 8q =$ ..........

**j** $18x^2 + 9yz =$ ..........

## Theorie B Zo veel mogelijk factoren buiten haakjes brengen

Soms is er meer dan één gemeenschappelijke factor, zoals bij $6pq - 30p$.
Je kunt dan op verschillende manieren ontbinden in factoren.
Met $6pq - 30p = 6p(q - 5)$ heb je alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes gebracht.

**Afspraak**
Bij de opdracht *ontbind in factoren* breng je alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes.

### Voorbeeld

Ontbind in factoren.

**a** $3xy + 21x$

**b** $15x^2 - 30x$

*Uitwerking*

**a** $3xy + 21x = 3x(y + 7)$

$3xy = \boxed{3} \cdot \boxed{x} \cdot y$
$21x = \boxed{3} \cdot 7 \cdot \boxed{x}$
} $3 \cdot x$, dus $3x$ buiten haakjes brengen

**b** $15x^2 - 30x = 15x(x - 2)$

$15x^2 = \boxed{3} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{x} \cdot x$
$30x = 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{x}$
} $3 \cdot 5 \cdot x$, dus $15x$ buiten haakjes brengen

**13** Ontbind in factoren.

**a** $2ab - 6bc =$ ..........

**b** $12p + 8q =$ ..........

**c** $9x^2 + 3x =$ ..........

**d** $18xy - 12y =$ ..........

**e** $6x^2 - 12x =$ ..........

**f** $c^2 + c =$ ..........

**g** $a^2b - 2b =$ ..........

**h** $2x^2 - 2x =$ ..........

## Theorie C Product-som-methode

Je weet $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$.
$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$

8 is de som van 3 en 5

15 is het product van 3 en 5

Omgekeerd kun je $x^2 + 8x + 15$ schrijven als het product $(x + 3)(x + 5)$.
Om de ontbinding $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$ zelf te maken, gaat het erom de getallen 3 en 5 te vinden. Die krijg je door twee getallen te zoeken met product 15 en som 8.
Dat zoeken gaat handig met de **tabel van 15**. In die tabel zet je alle manieren om 15 als product van twee gehele getallen te schrijven. Het is handig daarbij achter elk tweetal factoren de som te schrijven. Je ziet dat je 3 en 5 moet hebben.

| product 15 | | som |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 16 |
| –1 | –15 | –16 |
| 3 | 5 | (8) |
| –3 | –5 | –8 |

De ontbinding van $x^2 + 9x + 14$ krijg je als volgt.
$x^2 + 9x + 14 = (x + ...)(x + ...)$

som 9

product 14 dus maak de tabel van 14

zoek twee getallen met product 14 en som 9

| product 14 | | som |
|---|---|---|
| 1 | 14 | 14 |
| –1 | –14 | –15 |
| 2 | 7 | (9) |
| –2 | –7 | –9 |

In de tabel van 14 zie je dat je de getallen 2 en 7 moet hebben. Je krijgt $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$.

De ontbinding van $x^2 + 7x - 8$ krijg je als volgt.
$x^2 + 7x - 8 = (x - ...)(x + ...)$

som 7

product –8 dus maak de tabel van –8

zoek twee getallen met product –8 en som 7

| product –8 | | som |
|---|---|---|
| 1 | –8 | –7 |
| –1 | 8 | (7) |
| 2 | –4 | –2 |
| –2 | 4 | 2 |

In de tabel van –8 zie je dat je de getallen –1 en 8 moet hebben. Je krijgt $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$.
Deze methode van ontbinden heet de **product-som-methode**.

**14** Hiernaast staat de tabel van 18.

**a** Vul de tabel verder in.

**b** Ontbind in factoren.

$x^2 + 11x + 18 =$ ..........

$x^2 - 9x + 18 =$ ..........

$x^2 + 19x + 18 =$ ..........

$x^2 + 9x + 18 =$ ..........

| product 18 | | som |
|---|---|---|
| 1 | 18 | 19 |
| –1 | –18 | –19 |
| 2 | ... | ... |
| –2 | ... | ... |
| ... | ... | ... |
| ... | ... | ... |

**15** **a** Maak de tabel van 16.

**b** Ontbind in factoren.

$x^2 + 10x + 16 =$ ..........

$x^2 + 17x + 16 =$ ..........

$x^2 - 8x + 16 =$ ..........

**16** Ontbind in factoren.

**a** $x^2 + 8x + 7 =$ ..........

**b** $x^2 - 10x + 9 =$ ..........

**17** Je kunt $x^2 - x - 20$ schrijven als $x^2 - 1x - 20$, dus $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$.
Ontbind in factoren.

**a** $x^2 + x - 6 =$ ..........

**b** $x^2 + x - 30 =$ ..........

$x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$, maar je mag ook schrijven $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$.

**18** Ontbind in factoren.

**a** $x^2 - 8x + 15 =$ ..........

**b** $25a^2 - 30a =$ ..........

**c** $x^2 + 10x + 24 =$ ..........

**d** $x^2 - x - 2 =$ ..........

**e** $10pq + 5p =$ ..........

**f** $x^2 - 13x + 12 =$ ..........

# 7 [HAVO-B] Kwadratische vergelijkingen

## 7.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

### Theorie A Product is nul

Een vermenigvuldiging waar een factor 0 in staat, heeft als uitkomst altijd 0.
Bij de vergelijking $A \cdot B = 0$ weet je dus dat $A = 0$ of $B = 0$.

Met deze regel kun je sommige vergelijkingen oplossen.
Bij de vergelijking $2x(3x + 9) = 0$ zie je de twee factoren, $2x$ en $3x + 9$.
Eén van die factoren moet 0 zijn. Dus je weet dat $2x = 0$ of $3x + 9 = 0$.
Je moet dus twee vergelijkingen oplossen.
$2x = 0 \vee 3x + 9 = 0$
$x = 0 \vee 3x = -9$
$x = 0 \vee x = -3$

#### Voorbeeld

Los op.
**a** $4x(2x - 18) = 0$
**b** $(x + 8)(x - 3) = 0$

*Uitwerking*

**a** $4x(2x - 18) = 0$
$4x = 0 \vee 2x - 18 = 0$
$x = 0 \vee 2x = 18$
$x = 0 \vee x = 9$

**b** $(x + 8)(x - 3) = 0$
$x + 8 = 0 \vee x - 3 = 0$
$x = -8 \vee x = 3$

**1** Los op.
**a** $8x(4x - 8) = 0$
**b** $(3x + 12)(x - 6) = 0$
**c** $5x(x + 7) = 0$
**d** $(x - 4)(3x - 15) = 0$

## Theorie B Oplossen van kwadratische vergelijkingen

De vergelijking $x^2 - x - 42 = 0$ is een voorbeeld van een kwadratische vergelijking. Om die op te lossen, ga je eerst het linkerlid ontbinden in factoren. Daarna pas je de volgende regel toe.

**$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$**

| | |
|---|---|
| $x^2 - x - 42 = 0$ | ontbinden in factoren |
| $(x + 6)(x - 7) = 0$ | pas toe $A \cdot B = 0$ |
| $x + 6 = 0 \vee x - 7 = 0$ | dit geeft $A = 0$ of $B = 0$ |
| $x = -6 \vee x = 7$ | |

| product -42 | |
|---|---|
| 1 | -42 |
| -1 | 42 |
| 2 | -21 |
| -2 | 21 |
| 3 | -14 |
| -3 | 14 |
| 6 | -7 |
| -6 | 7 |

Een kwadratische vergelijking zoals $x^2 + 2x = 15$ kun je alleen oplossen als het rechterlid 0 is. Je herleidt de vergelijking dus eerst tot $x^2 + 2x - 15 = 0$.

**Werkschema: Kwadratische vergelijkingen oplossen**

1. Maak het rechterlid 0.
2. Ontbind het linkerlid in factoren.
3. Pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

### Voorbeeld

Los op.

**a** $x^2 - 6x = 7$ **b** $5a^2 = -30a$

*Uitwerking*

**a** $x^2 - 6x = 7$
$x^2 - 6x - 7 = 0$
$(x + 1)(x - 7) = 0$
$x + 1 = 0 \vee x - 7 = 0$
$x = -1 \vee x = 7$

**b** $5a^2 = -30a$
$5a^2 + 30a = 0$
$5a(a + 6) = 0$
$5a = 0 \vee a + 6 = 0$
$a = 0 \vee a = -6$

**2** Los op.

**a** $x^2 + 5x - 24 = 0$
**b** $x^2 - 8x = 33$
**c** $x^2 = 6x$
**d** $4x^2 + 2x = 0$
**e** $b^2 + 7b + 12 = 0$
**f** $x^2 - 15 = -2x$

**3** Los op.

**a** $14x^2 = 21x$
**b** $(x + 8)(x - 5) = 0$
**c** $x^2 + 11x + 10 = 0$
**d** $x^2 + 12x = -35$
**e** $x^2 = 14x - 40$
**f** $a^2 - 50 = 4 - 3a$

## Theorie C Vergelijkingen van de vorm $x^2 = c$ oplossen

De vergelijking $x^2 = 47$ is ook een kwadratische vergelijking.
Deze vergelijking heeft twee oplossingen. Je kunt de oplossingen meteen opschrijven. Je krijgt $x = \sqrt{47} \vee x = -\sqrt{47}$.
De vergelijking $x^2 = -16$ heeft geen oplossing, want een kwadraat is niet negatief.

Bij vergelijkingen van de vorm $x^2 = c$ zijn er drie mogelijkheden:

- er zijn twee oplossingen, als $c > 0$ bijvoorbeeld $x^2 = 9$
- er is geen oplossing, als $c < 0$ bijvoorbeeld $x^2 = -4$
- er is één oplossing, als $c = 0$ bijvoorbeeld $x^2 = 0$

Soms moet je een vergelijking eerst herleiden om de vorm $x^2 = c$ te krijgen.

### Voorbeeld

Los op.

**a** $x^2 - 81 = 0$

**b** $3x^2 - 18 = 0$

*Uitwerking*

**a** $x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 81$
$x = 9 \vee x = -9$ bedenk dat $\sqrt{81} = 9$

**b** $3x^2 - 18 = 0$
$3x^2 = 18$
$x^2 = 6$
$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

**4** Los op.

**a** $x^2 = 100$
**b** $x^2 = -20$
**c** $-x^2 = 144$
**d** $x^2 + 64 = 0$
**e** $5x^2 - 45 = 0$
**f** $3x^2 + 2 = 101$

**5** Los op.

**a** $(x + 3)(x - 8) = 0$
**b** $p(3p + 9) = 0$
**c** $5c^2 + 25c = 0$
**d** $x^2 - 4x = 21$
**e** $x^2 - 3x = -2x$
**f** $3b^2 = -15b$
**g** $(x - 7)(3x + 6) = 0$
**h** $-3x^2 - 1 = 50$
**i** $6b^2 = 96$

**6** Los op.

**a** $x^2 - 10 = 0$
**b** $q^2 + 15q = -50$
**c** $p(5p + 10) = 0$
**d** $x^2 + 5x = 2x$
**e** $x^2 + 12x = -27$
**f** $x^2 + 9x = -14 + 9x$
**g** $x^2 - x = 20$
**h** $5x^2 = 10$
**i** $9x^2 = 900$

# 7.2 De *abc*-formule

## Theorie A Oplossen met de *abc*-formule

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$.
Een kwadratische vergelijking kun je oplossen met de ***abc*-formule**.
Dat doe je als je de vergelijking niet kunt oplossen met ontbinden in factoren.

**Werkschema: Kwadratische vergelijkingen oplossen met de *abc*-formule**

1. Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Vermeld welke getallen $a$, $b$ en $c$ zijn.
3. Bereken $D = b^2 - 4ac$.
4. De oplossingen zijn $x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

$D = b^2 - 4ac$ heet de **discriminant** van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.
Van de vergelijking $3x^2 + 7x - 2 = 0$ bereken je de discriminant als volgt.
$a = 3$, $b = 7$ en $c = -2$
$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 73$

$a \neq 0$ betekent
$a$ is niet gelijk aan 0

**De *abc*-formule**

**De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ zijn**

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

### Voorbeeld

Los op $2x^2 + 5x = 3$.

*Uitwerking*

| | |
|---|---|
| $2x^2 + 5x = 3$ | maak het rechterlid 0 |
| $2x^2 + 5x - 3 = 0$ | ontbinden lukt niet, dus gebruik de *abc*-formule |
| $a = 2$, $b = 5$ en $c = -3$ | bereken eerst $D = b^2 - 4ac$ |
| $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$ | |
| $x = \dfrac{-5 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \dfrac{-5 - \sqrt{49}}{4}$ | |
| $x = \frac{1}{2} \vee x = -3$ | |

**7** Los op.

**a** $3x^2 - 7x + 2 = 0$

**b** $5x^2 = 4 + x$

**c** $4x^2 + 9x = -2$

**d** $4x^2 + 5x + 1 = 0$

**e** $2x^2 + 3x = 5$

**f** $4x^2 - 8x + 3 = 0$

## Theorie B Oplossen met de *abc*-formule

Soms komt $\sqrt{D}$ niet mooi uit. Laat dan het getal onder het wortelteken gewoon staan.

### Voorbeeld

Los op $5x^2 = 6 - 10x$.

*Uitwerking*

$5x^2 = 6 - 10x$

$5x^2 + 10x - 6 = 0$

$a = 5$, $b = 10$ en $c = -6$

$D = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot -6 = 220$

$x = \frac{-10 + \sqrt{220}}{10} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{220}}{10}$

**8** Los op.

**a** $x^2 + 10x + 13 = 0$

**b** $x^2 = 5x + 8$

**c** $4x^2 = 5x + 2$

**d** $8x^2 = x + 10$

**e** $x^2 = -3x + 1$

## Theorie C Het aantal oplossingen van een vergelijking

De discriminant van een kwadratische vergelijking kan een negatief getal zijn. In de *abc*-formule geeft dat dan de wortel uit een negatief getal. Een wortel uit een negatief getal bestaat niet, daarom heeft de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ geen oplossing als $D < 0$. Een kwadratische vergelijking met

- $D < 0$ heeft geen oplossing
- $D = 0$ heeft één oplossing
- $D > 0$ heeft twee oplossingen.

## Voorbeeld

Los op $x^2 + x + 2 = 0$.

*Uitwerking*

$x^2 + x + 2 = 0$

$a = 1$, $b = 1$ en $c = 2$

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$

$D < 0$, dus geen oplossing.

**9** Los op.

**a** $4x^2 + 2x + 3 = 0$

**b** $7x + 2 = x^2$

**c** $15x^2 = 8x + 5$

**d** $-x^2 + 5x + 3 = 0$

**e** $14x - 5x^2 - 3 = 0$

**f** $-2x^2 = 3x + 5$

**10** Los op.

**a** $20x^2 + 25x + 1 = 0$

**b** $3x + 1 = 2x^2$

**c** $2x^2 = x - 5$

**d** $-3x^2 + 7x + 2 = 0$

**e** $5x^2 - 12x - 10 = 0$

**f** $x^2 + 5x + 9 = 0$

**g** $x^2 - 4 = 2x$

**h** $6x^2 + x = 1$

# 8 [HAVO-B/MBO] Kwadratische functies

## Theorie A Kwadratische functies en functiewaarden

De functies $f(x) = x^2 - 5x + 8$ en $g(x) = -2x^2 + 3x$ zijn voorbeelden van kwadratische functies.

**Een functie $f$ van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie.**

$a \neq 0$ betekent
$a$ is niet gelijk aan 0

Neem je bij $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $a = 1$, $b = -5$ en $c = 8$, dan krijg je $f(x) = x^2 - 5x + 8$
- $a = -6$, $b = 8$ en $c = 0$, dan krijg je $f(x) = -6x^2 + 8x$.

Ook bij kwadratische functies kun je functiewaarden berekenen.
Zo krijg je bij $f(x) = -6x^2 + 8x$ voor $x = -5$ de functiewaarde $f(-5) = -6 \cdot (-5)^2 + 8 \cdot -5 = -150 - 40 = -190$.
Denk hierbij aan de haakjes om $-5$.
En zo krijg je bij $f(x) = x^2 - 5x + 8$ voor $x = 4$ de functiewaarde $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 8 = 16 - 20 + 8 = 4$.

Ga je $x^2$ berekenen voor $x = -4$, dan zet je $-4$ tussen haakjes. Dus voor $x = -4$ is $x^2 = (-4)^2 = 16$.

Bij de functies $f(x) = -6x^2 + 8x$ en $f(x) = x^2 - 5x + 8$ horen de formules $y = -6x^2 + 8x$ en $y = x^2 - 5x + 8$.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

**a** Bereken $f(4)$ en $f(-6)$.

**b** Onderzoek of het punt $(-5, 74)$ op de grafiek van $f$ ligt.

*Uitwerking*

**a** $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 24$
$f(-6) = 2 \cdot (-6)^2 - 3 \cdot -6 + 4 = 94$

**b** $f(-5) = 2 \cdot (-5)^2 - 3 \cdot -5 + 4 = 69$
Het punt $(-5, 74)$ ligt dus niet op de grafiek van $f$.

**1** Een functie van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie.
Welke functie krijg je voor

**a** $a = 2$, $b = 6$ en $c = -3$ **b** $a = -1$, $b = 3$ en $c = 0$ **c** $a = 4$, $b = 0$ en $c = 2$

Welke getallen zijn $a$, $b$ en $c$ bij

**d** $f(x) = 5x^2 - x + 1$ **e** $f(x) = -x^2 + 8x$ **f** $f(x) = 3x^2 - 11$

**2** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x$.

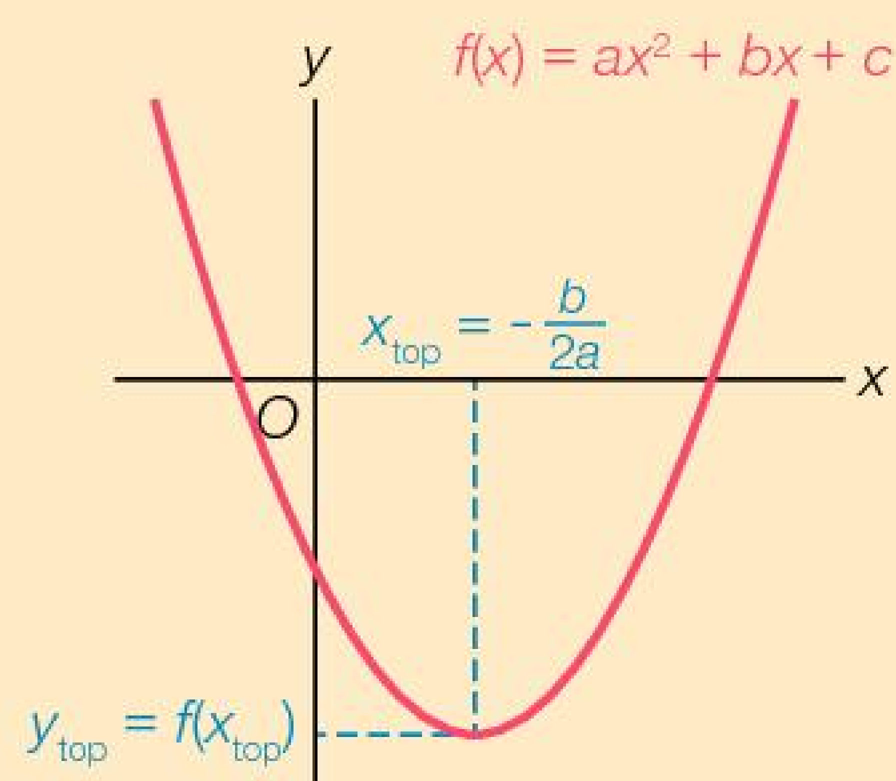
**a** Geef de formule van $f$.
**b** Bereken $f(4)$ en $f(-4)$.
**c** Waarom ligt het punt $A(-10, 180)$ op de grafiek van $f$?
**d** Onderzoek of het punt $B(-5, -15)$ op de grafiek van $f$ ligt.

**3** Gegeven is de functie $h(x) = x^2 - x - 2$.

**a** Bereken $h(-3)$ en $h(5)$.
**b** Op de grafiek van $h$ ligt het punt $A$ met $x_A = 4$.
Bereken $y_A$.
**c** Op de grafiek van $h$ ligt het punt $B$ met $x_B = -5$.
Bereken de $y_B$.

## Theorie B De top van een parabool

De grafiek van een kwadratische functie is een parabool.
Van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ kun je de coördinaten van de top $(x_{top}, y_{top})$ berekenen.
Er geldt namelijk $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.




Wil je dus van de functie $f(x) = x^2 - 6x + 4$ de coördinaten van de top van de grafiek berekenen,
bedenk dan dat $a = 1$ en $b = -6$, dus $x_{top} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$.
De $y$-coördinaat van de top krijg je door de $x$-coördinaat van de top in te vullen in het functievoorschrift.
Dit geeft $y_{top} = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$, dus de top is het punt $(3, -5)$.

### Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

*Uitwerking*

$a = -2$ en $b = -4$, dus $x_{top} = -\frac{-4}{2 \cdot -2} = -1$.
$y_{top} = f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot -1 + 1 = 3$
Dus de top is $(-1, 3)$.

**4** Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van

**a** $f(x) = 2x^2 - 8x - 2$
**b** $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 4$
**c** $h(x) = x^2 - 8x$
**d** $k(x) = -3x^2 + 4$

## Theorie C Parabolen tekenen

De grafiek van de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool.
Aan het getal $a$ kun je zien wat voor parabool het is.
Is $a$ een positief getal, dan krijg je een dalparabool.
Zo is de grafiek van de functie
$f(x) = x^2 - 2x + 4$ een dalparabool.
Is $a$ een negatief getal, dan krijg je een bergparabool.
Zo is de grafiek van de functie $h(x) = -2x^2 + 6x$ een bergparabool.
Om een parabool te tekenen, bereken je eerst de $x$-coördinaat van de top met $x_{top} = -\frac{b}{2a}$. Daarna maak je een tabel met zeven punten.
De $x$-coördinaat van de top zet je in het midden.

positief ☺ dalparabool
negatief ☹ bergparabool

### Voorbeeld

Teken de grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

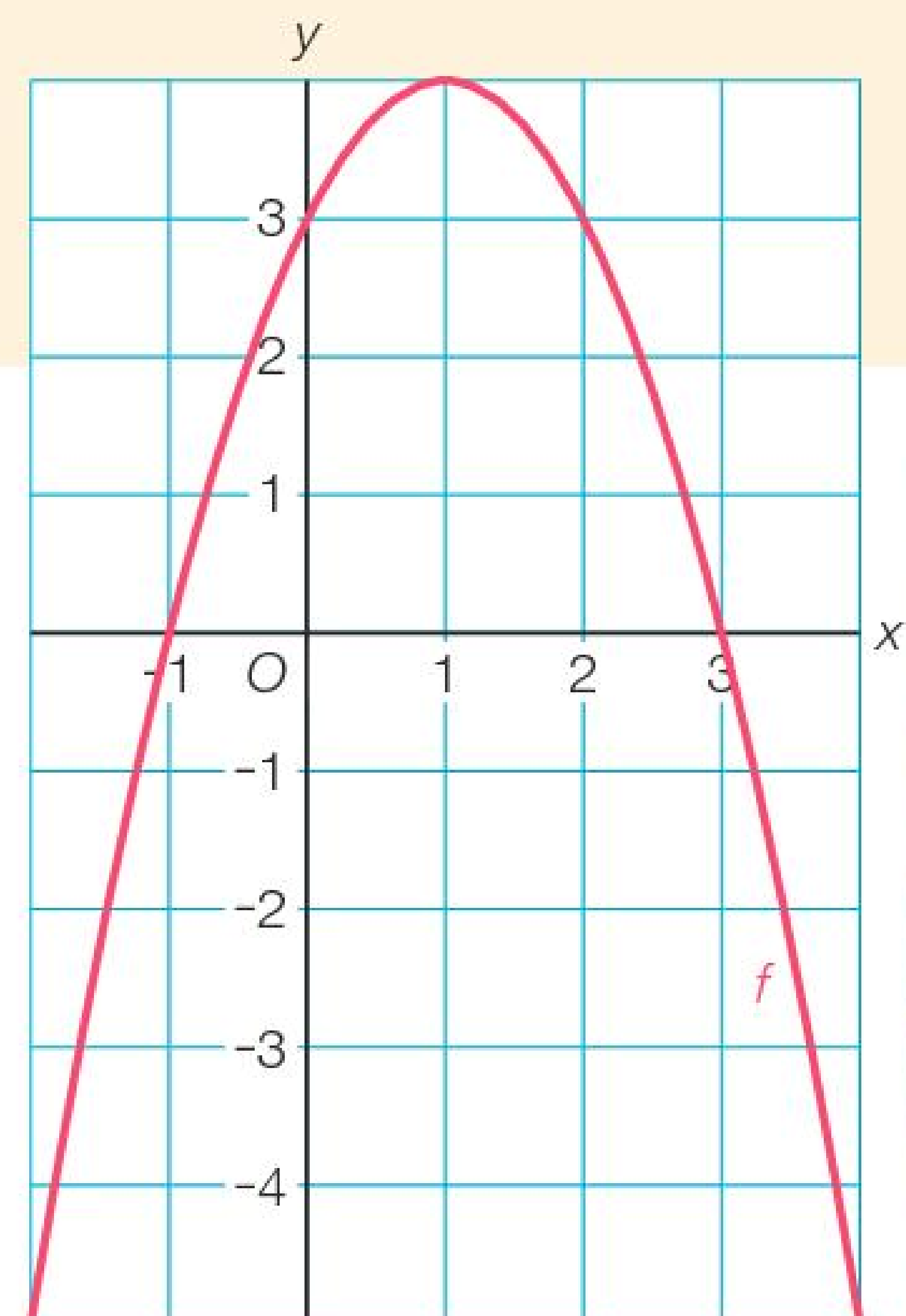
*Uitwerking*

$a = -1$ en $b = 2$, dus $x_{top} = -\frac{2}{2 \cdot -1} = 1$

$x_{top}$

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -5 | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 | -5 |

Zie de grafiek hiernaast.




**5** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4$.

**a** Bereken de $x$-coördinaat van de top.
**b** Teken de grafiek van $f$.

**6** De functie $h$ is gegeven door $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

**a** Teken de grafiek van $h$.
**b** Onderzoek of het punt $A(-10, 264)$ op de grafiek van $h$ ligt.

# 9 [HAVO-B] Kwadratische vormen

## 9.1 Snijpunten met de *x*-as en de *y*-as

### Theorie A Snijpunten met de *x*-as en de *y*-as

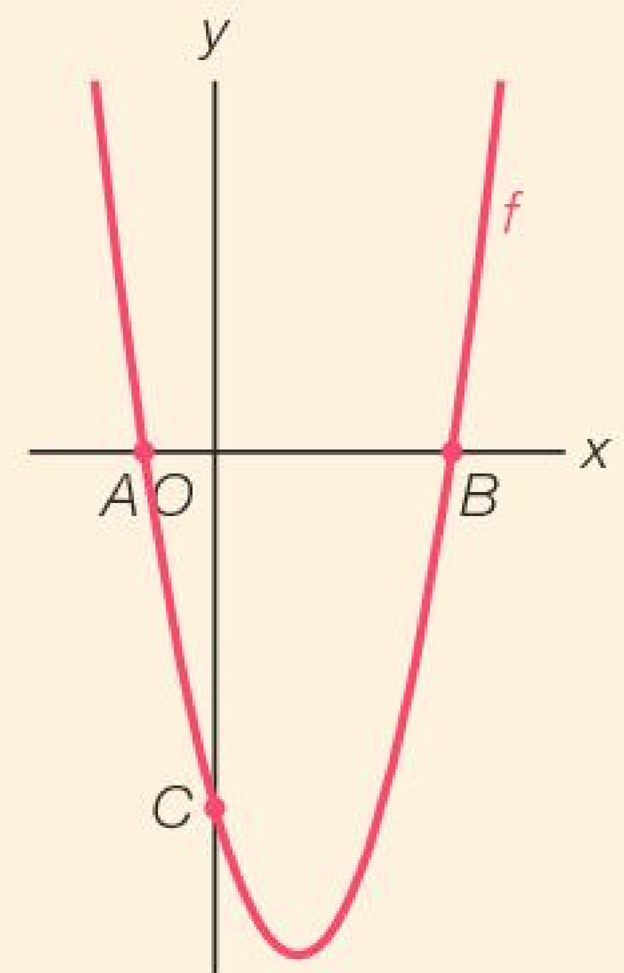
Bij de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ bereken je de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de assen als volgt.

Snijpunten met de *x*-as: De *y*-coördinaat is 0. De *x*-coördinaat volgt uit $f(x) = 0$. Dus los op $f(x) = 0$.

Snijpunt met de *y*-as: De *x*-coördinaat is 0. De *y*-coördinaat is $f(0)$. Dus bereken $f(0)$.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x - 6$.
De grafiek van *f* snijdt de *x*-as in de punten *A* en *B* en de *y*-as in het punt *C*.
Bereken de coördinaten van *A*, *B* en *C*.




*Uitwerking*

$f(x) = 0$ geeft $x^2 - 5x - 6 = 0$
$(x + 1)(x - 6) = 0$
$x + 1 = 0 \vee x - 6 = 0$
$x = -1 \vee x = 6$
Dus $A(-1, 0)$ en $B(6, 0)$.
$f(0) = -6$, dus $C(0, -6)$.

**1** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 5x$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van *f* met de *x*-as.

**2** De grafiek van de functie $g(x) = x^2 - x - 12$ snijdt de *x*-as in de punten *A* en *B* en de *y*-as in het punt *C*.
Bereken de coördinaten van *A*, *B* en *C*.

# 9.2 De parabool $y = a(x - d)(x - e)$

## Theorie A De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

Het functievoorschrift $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ is te schrijven in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Je werkt dan de haakjes weg in $-2(x + 1)(x - 6)$.
Je weet dat $(x + 1)(x - 6) = x^2 - 6x + x - 6 = x^2 - 5x - 6$, dus
$f(x) = -2(x + 1)(x - 6) = -2(x^2 - 5x - 6) = -2x^2 + 10x + 12$.
Dus $a = -2$, $b = 10$ en $c = 12$.
De functie $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ is dus een kwadratische functie en de grafiek van $f$ is een parabool.

En zo is
$f(x) = 3(x - 2)(x - 4) = 3(x^2 - 4x - 2x + 8) = 3(x^2 - 6x + 8) = 3x^2 - 18x + 24$.
Dus bij het herleiden van $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ tot de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ vind je $a = 3$, $b = -18$ en $c = 24$.

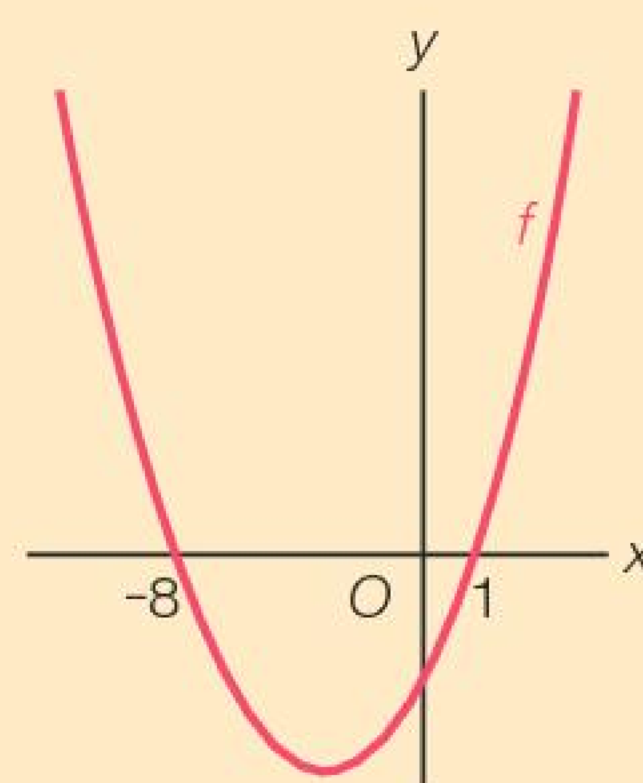
Functies zoals $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ en $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ zijn kwadratische functies die gegeven zijn in de vorm $f(x) = a(x - d)(x - e)$.
In $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ is $a = -2$, $d = -1$ en $e = 6$.
In $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ is $a = 3$, $d = 2$ en $e = 4$.

**3** Gegeven is de functie is $f(x) = 3(x + 4)(x - 2)$.
- **a** Bereken $f(-4)$, $f(4)$, $f(0)$ en $f(2)$.
- **b** $f(x)$ heeft de vorm $f(x) = a(x - d)(x - e)$.
  Geef $a$, $d$ en $e$.
- **c** Schrijf $f(x)$ in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en geef $a$, $b$ en $c$.

**4** Gegeven is de functie $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x + 4)$.
- **a** Bereken $g(-2)$, $g(0)$ en $g(-4)$.
- **b** $g(x)$ heeft de vorm $g(x) = a(x - d)(x - e)$.
  Geef $a$, $d$ en $e$.
- **c** Schrijf $g(x)$ in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.

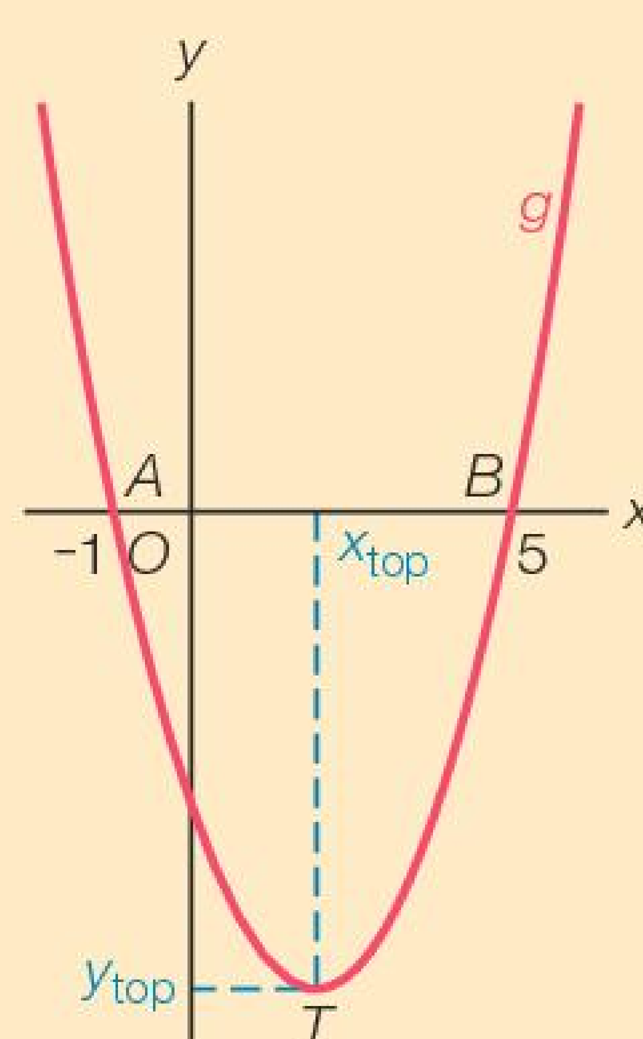
## Theorie B Bijzondere punten van de grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f(x) = 2(x + 8)(x - 1)$ met de $x$-as zijn direct te geven.
Dat zijn $(-8, 0)$ en $(1, 0)$, want
$f(-8) = 2(-8 + 8)(-8 - 1) = 2 \cdot 0 \cdot -9 = 0$ en
$f(1) = 2(1 + 8)(1 - 1) = 2 \cdot 9 \cdot 0 = 0$.




**De grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$ snijdt de $x$-as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$.**

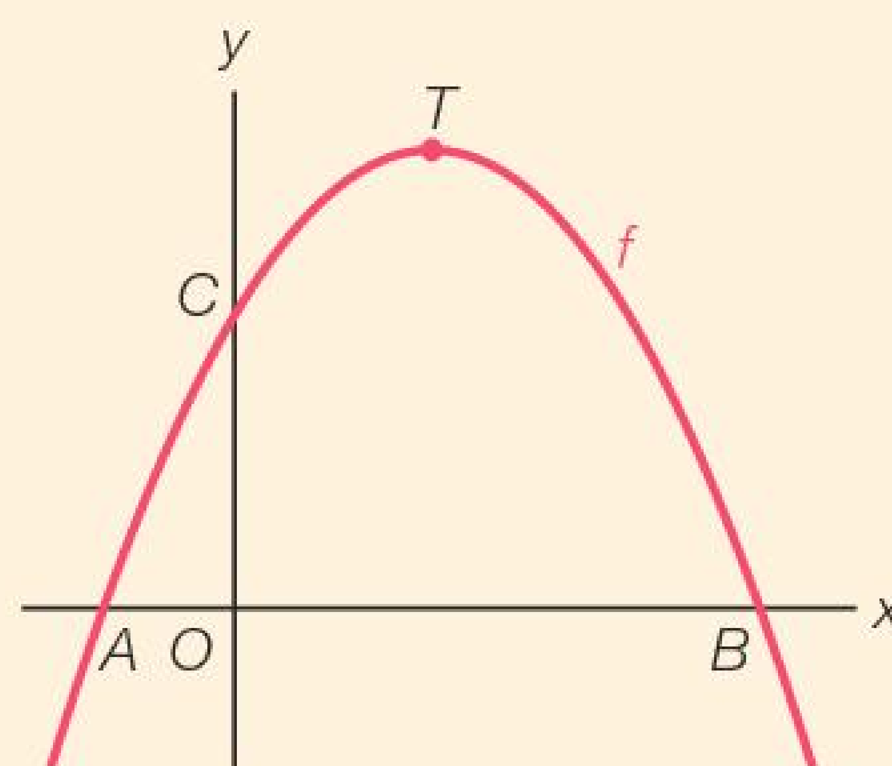
De coördinaten van de top $T$ van de grafiek van $g(x) = (x + 1)(x - 5)$ volgen uit de snijpunten van de grafiek met de $x$-as.
De snijpunten met de $x$-as zijn de punten $A(-1, 0)$ en $B(5, 0)$. Dan is $x_{top}$ het getal midden tussen $-1$ en 5.
Je krijgt $x_{top} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$.
Daaruit volgt $y_{top} = g(2) = (2 + 1)(2 - 5) = 3 \cdot -3 = -9$.
Dus de top is het punt $T(2, -9)$.




### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 8)$.
De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in de punten $A$ en $B$ en de $y$-as in het punt $C$.

**a** Bereken de coördinaten van $A$, $B$ en $C$.
**b** Bereken de coördinaten van de top $T$.




*Uitwerking*

**a** De snijpunten met de $x$-as zijn $A(-2, 0)$ en $B(8, 0)$.
$f(0) = -\frac{1}{4}(0 + 2)(0 - 8) = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot -8 = 4$, dus $C(0, 4)$.

**b** $x_{top} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$
$y_{top} = f(3) = -\frac{1}{4}(3 + 2)(3 - 8) = -\frac{1}{4} \cdot 5 \cdot -5 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$
Dus $T(3, 6\frac{1}{4})$.

**5** Schrijf van de grafieken van de volgende functies uit het hoofd de coördinaten van de snijpunten met de $x$-as op.

**a** $f(x) = 5(x - 7)(x - 12)$

**b** $g(x) = -2(x + 8)(x + 19)$

**c** $h(x) = 5(x - 11)(x + 36)$

**d** $k(x) = x(x - 125)$

**e** $m(x) = \frac{1}{2}(x - 20)(x + 160)$

**f** $n(x) = -5x(x - 116)$

**6** Bereken van de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de $x$-as en de $y$-as en bereken de coördinaten van de top.

**a** $f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)(x - 10)$

**b** $g(x) = -5(x + 5)(x - 3)$

**c** $h(x) = 6x(x + 10)$

**d** $k(x) = -(x + 16)(x + 24)$

**7** Gegeven is de functie $h(x) = 4x(x - 6)$.

**a** Bereken $h(0)$, $h(2)$ en $h(6)$.

**b** $h(x)$ is gegeven in de vorm $h(x) = a(x - d)(x - e)$. Geef $a$, $d$ en $e$.

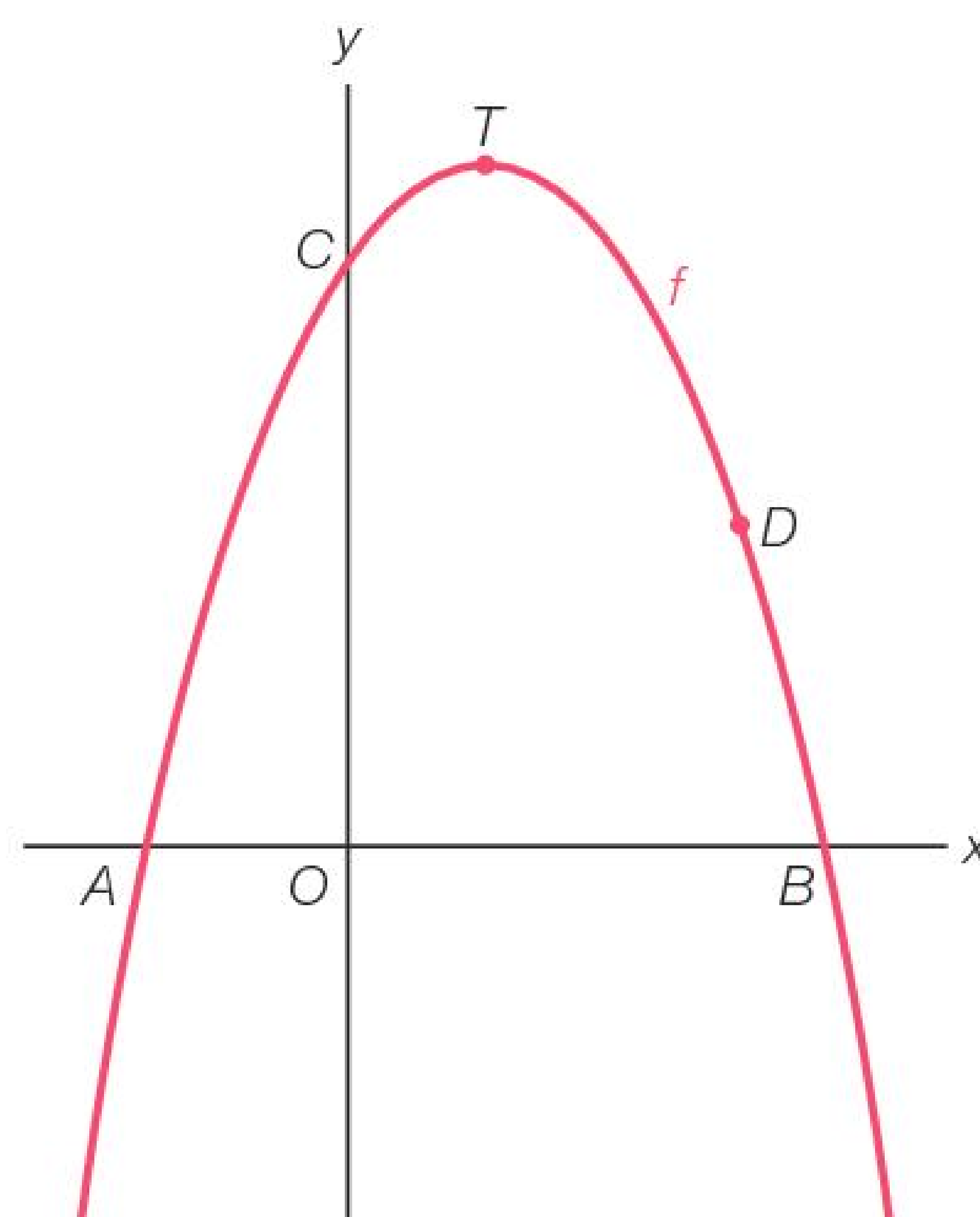
**c** Schrijf het functievoorschrift van $h$ in de vorm $h(x) = ax^2 + bx + c$.

**8** Hiernaast zie je een schets van de grafiek van de functie $f(x) = -2(x + 2)(x - 5)$.

**a** Bereken de coördinaten van de punten $A$, $B$, $C$ en $T$.

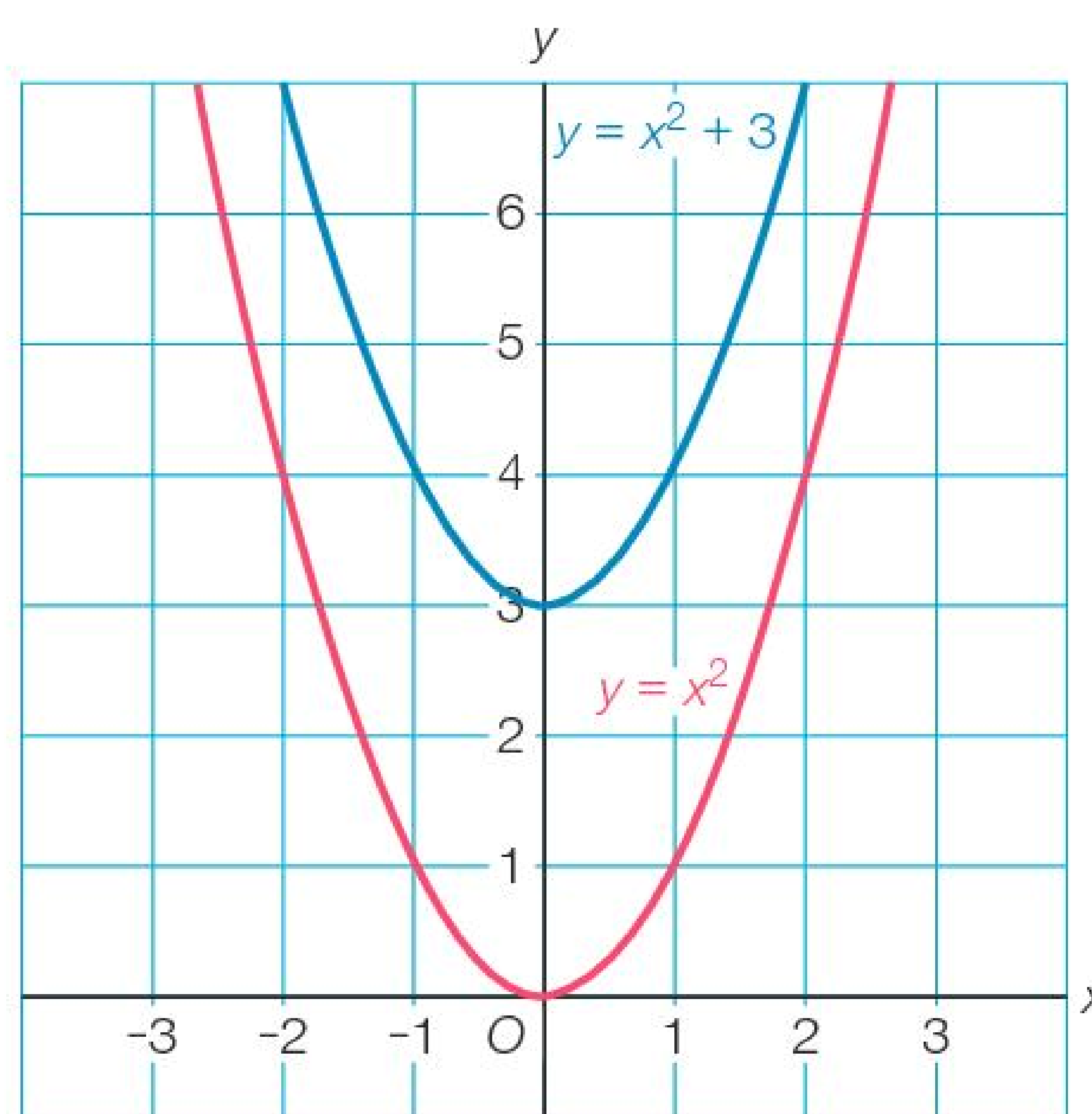
**b** Van het punt $D$ is $x_D = 4$. Bereken $y_D$.

**c** Schrijf het functievoorschrift van $f$ in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.



# 9.3 Parabolen verschuiven

**9** Hiernaast zie je de grafieken van $y = x^2$ en $y = x^2 + 3$.
Je kunt de rode grafiek zo verschuiven, dat deze precies op de blauwe valt.
Hoeveel moet je omhoog verschuiven?



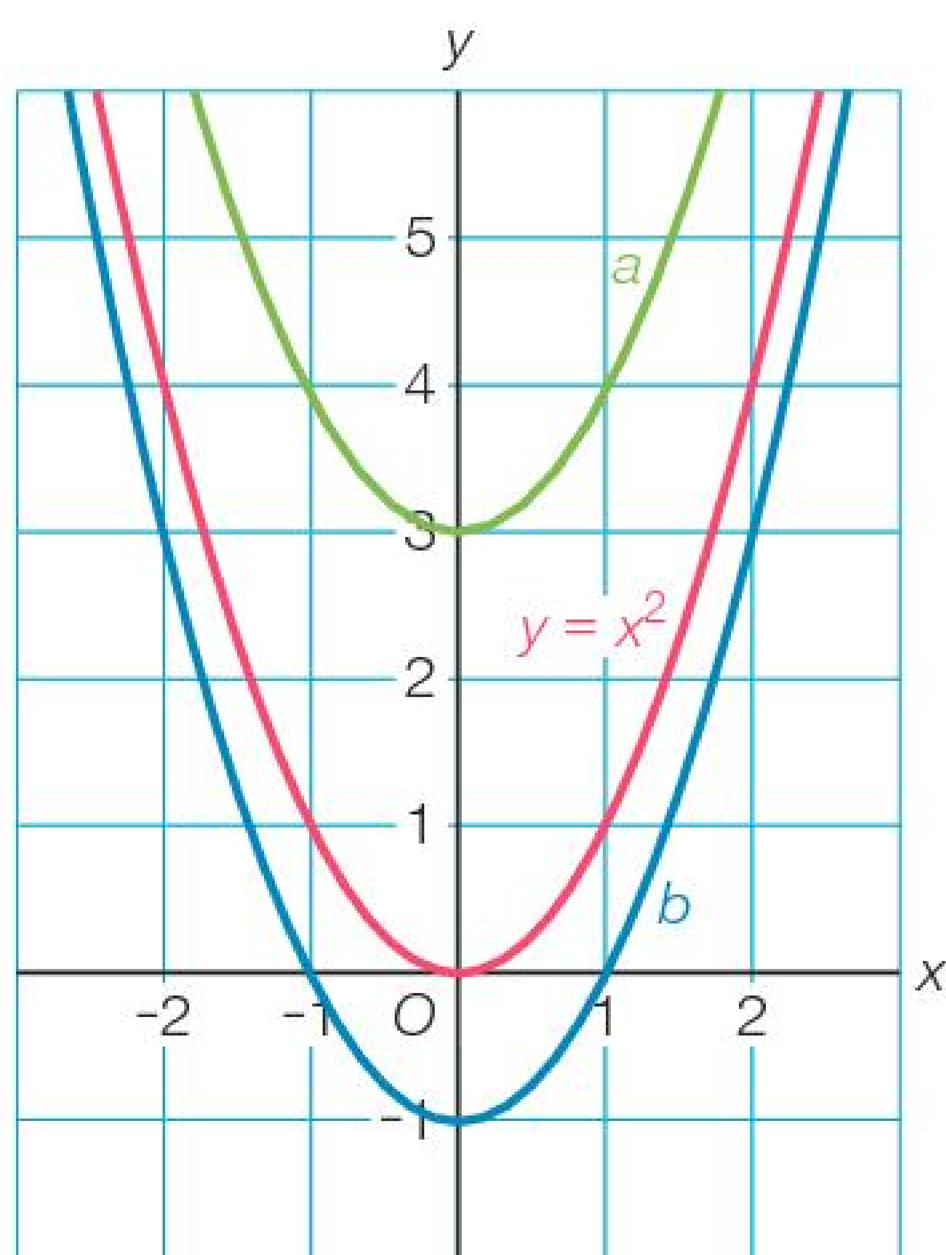

## Theorie A Verticaal verschuiven

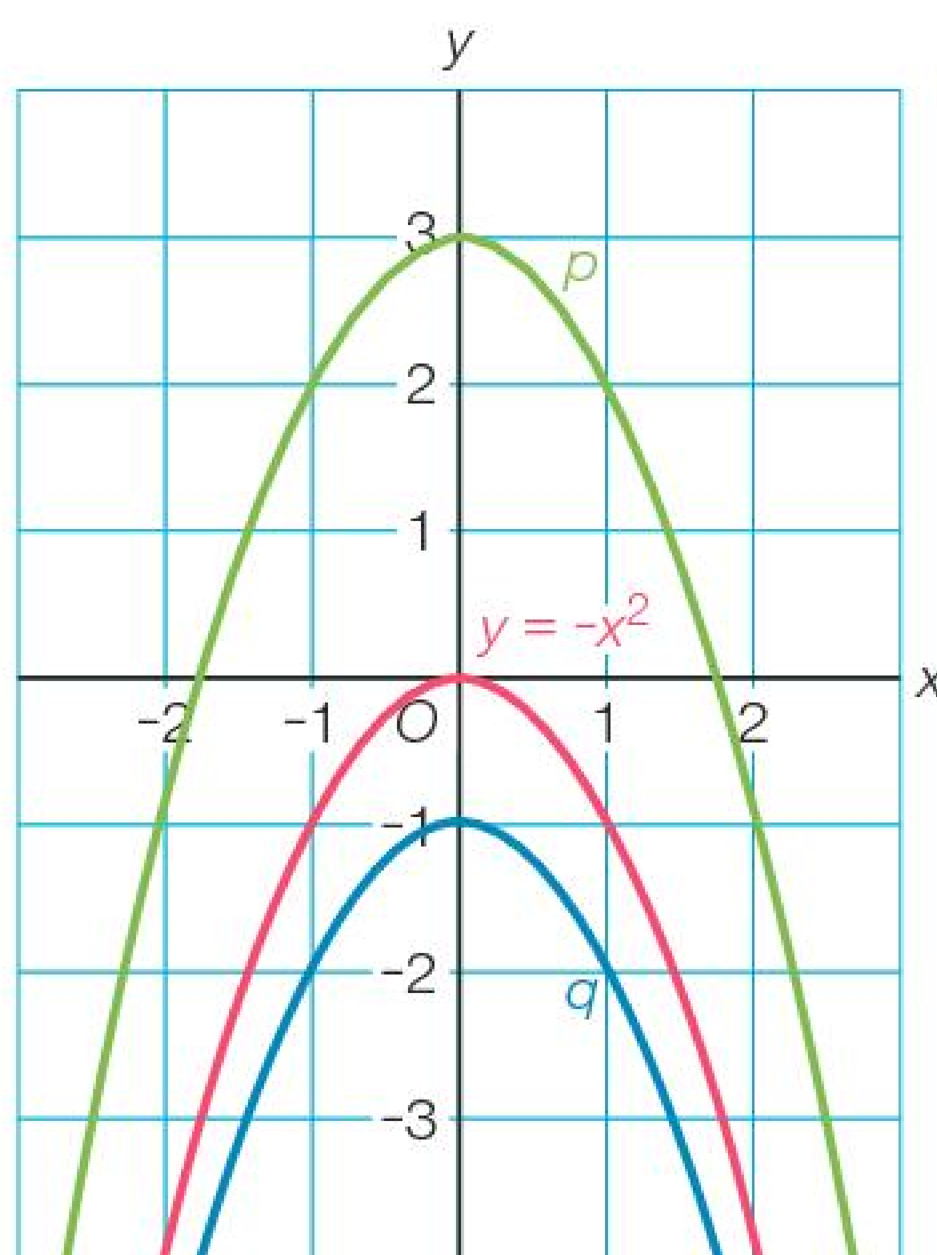
Door de grafiek van $y = 2x^2$

- 1 omhoog te verschuiven, krijg je de grafiek van $y = 2x^2 + 1$
- 3 omlaag te verschuiven, krijg je de grafiek van $y = 2x^2 - 3$.

**10** **a** In de figuur linksonder zie je drie parabolen. De parabolen van *a* en *b* krijg je door de parabool $y = x^2$ te verschuiven.
Schrijf de formules op van de parabolen *a* en *b*.

**b** In de figuur rechtsonder zie je drie parabolen. De parabolen van *p* en *q* krijg je door de parabool $y = -x^2$ te verschuiven.
Schrijf de formules op van de parabolen *p* en *q*.

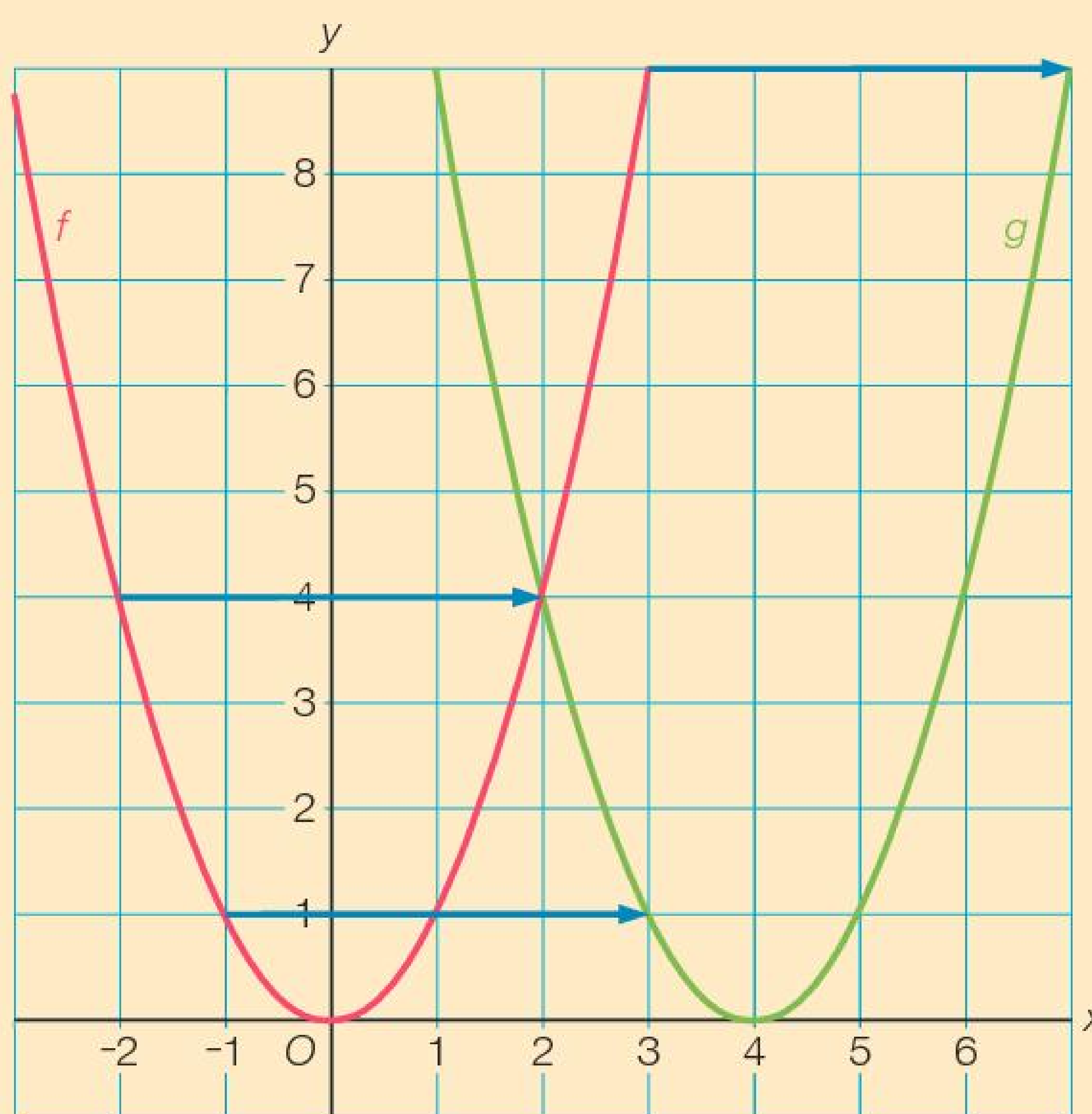


**11** De grafiek van de functie $f(x) = -3x^2$ wordt 5 omhoog verschoven. Je krijg de grafiek van de functie $g$. Schrijf het functievoorschrift van $g$ op.

## Theorie B Horizontaal verschuiven

Er is een verband tussen de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x - 4)^2$.
$f(0) = g(4) = 0$, $f(1) = g(5) = 1$, $f(2) = g(6) = 4$, enzovoort.
Als je vanuit een punt van de grafiek van $f$ dus 4 naar rechts gaat, dan krijg je een punt van de grafiek van $g$.
Door de grafiek van $f$ dus 4 naar rechts te verschuiven, ontstaat de grafiek van $g$.




En zo geldt voor de functie $f(x) = x^2$
- verschuif je de grafiek 2 naar rechts dan krijg je de grafiek van $h(x) = (x - 2)^2$
- verschuif je de grafiek 3 naar links dan krijg je de grafiek van $k(x) = (x + 3)^2$.

**Verschuiven van de grafiek van $y = 2x^2$**

**verticaal** $y = 2x^2 \xrightarrow{\text{4 omhoog}} y = 2x^2 + 4$

$y = 2x^2 \xrightarrow{\text{4 omlaag}} y = 2x^2 - 4$

**horizontaal** $y = 2x^2 \xrightarrow{\text{9 naar rechts}} y = 2(x - 9)^2$

$y = 2x^2 \xrightarrow{\text{6 naar links}} y = 2(x + 6)^2$

9 naar rechts:
vervang $x$ door $(x - 9)$
6 naar links:
vervang $x$ door $(x + 6)$

## Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = 0{,}3x^2 - 5$ wordt eerst 4 naar links verschoven en vervolgens 7 omlaag. Zo krijg je de grafiek van de functie $g$. Stel het functievoorschrift van $g$ op.

*Uitwerking*

$y = 0{,}3x^2 - 5 \xrightarrow{\text{4 naar links}} y = 0{,}3(x + 4)^2 - 5$ vervang $x$ door $(x + 4)$

$y = 0{,}3(x + 4)^2 - 5 \xrightarrow{\text{7 omlaag}} y = 0{,}3(x + 4)^2 - 12$ trek er 7 van af

Dus $g(x) = 0{,}3(x + 4)^2 - 12$.

**12** De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ wordt 5 naar rechts verschoven. Zo krijg je de grafiek van de functie $g$. Stel het functievoorschrift van $g$ op.

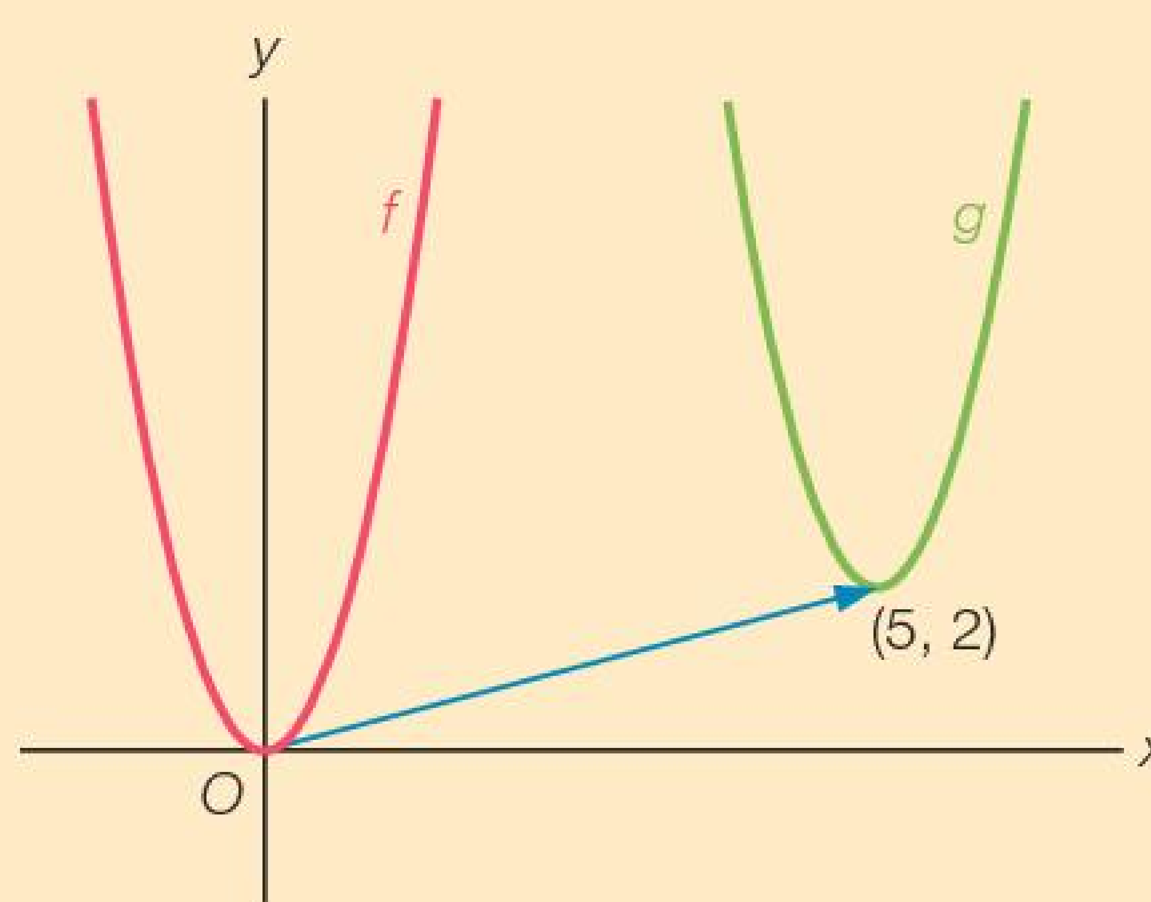
**13** Stel de formule op van de parabool die ontstaat na een verschuiving van de parabool $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6$ van

- **a** 4 omhoog
- **b** 2 omlaag
- **c** 1 naar links en 8 omhoog
- **d** 2 naar rechts en 3 omlaag

**14**
- **a** Geef de verschuiving van de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ waardoor de grafiek van de functie $g(x) = (x - 2)^2 + 5$ ontstaat.
- **b** Geef de verschuiving van de grafiek van de functie $h(x) = -2x^2$ waardoor de grafiek van de functie $k(x) = -2(x + 3)^2 - 8$ ontstaat.

## Theorie C De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$

De top van de grafiek van de functie $f(x) = 4x^2$ is $O(0, 0)$. Ook van de grafiek van de functie $g(x) = 4(x - 5)^2 + 2$ kun je direct de coördinaten van de top opschrijven. De grafiek van $g$ ontstaat uit die van $f$ door deze 5 naar rechts en 2 omhoog te verschuiven. De top van de grafiek van $g$ is dus het punt $(5, 2)$.



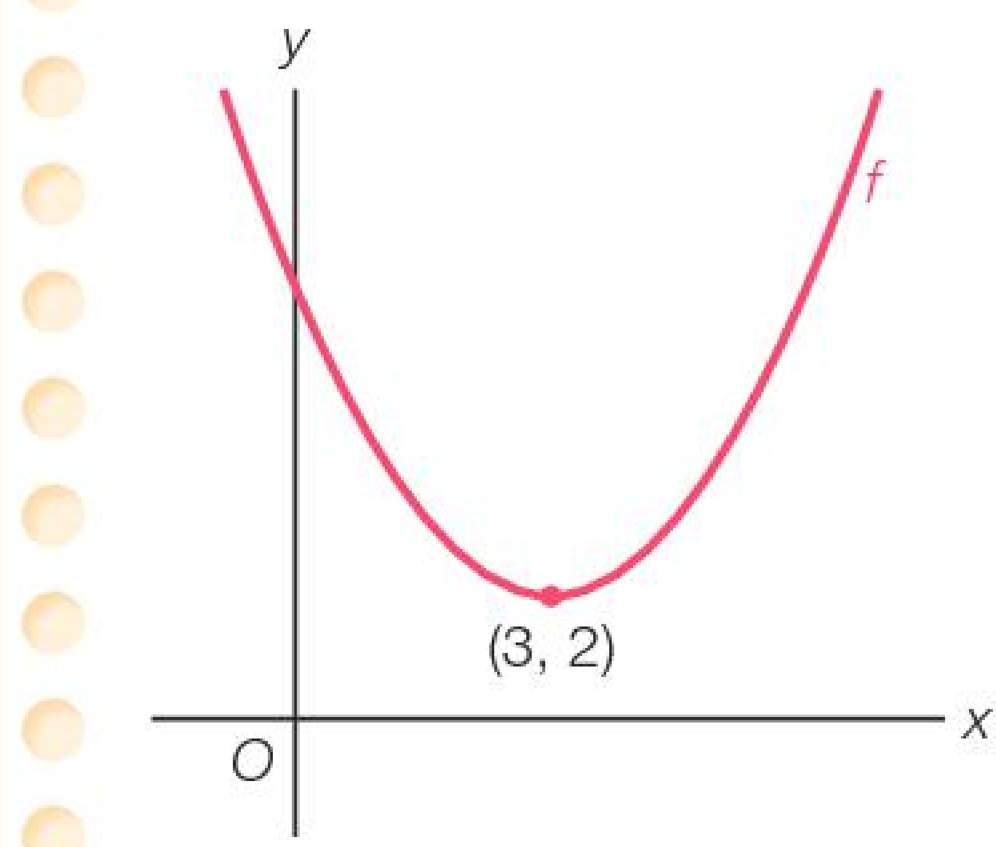

**De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ is het punt $(p, q)$.**

## Voorbeeld

Schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$.

*Uitwerking*

$a = \frac{1}{2}$, dus dalparabool.
De top is het punt (3, 2).




Zet in je schets de coördinaten van de top en de naam van de functie.

**15** Schets van elk van de volgende functies de grafiek.

**a** $f(x) = (x - 2)^2 - 3$
**b** $g(x) = -2(x + 2)^2 + 3$
**c** $h(x) = 4(x - 6)^2 + 4$
**d** $k(x) = -8(x + 6)^2 - 4$

**16** Schets van elk van de volgende functies de grafiek.

**a** $f(x) = -2x^2 - 4$
**b** $g(x) = -2(x + 2)^2 + 3$
**c** $h(x) = -3(x - 1)^2 + 3$
**d** $k(x) = (x + 6)^2$

**17** Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 - 7$.

**a** Schets de grafiek van $f$.
**b** De grafiek van $f$ wordt 3 naar rechts en 5 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g$. Schets in de figuur van vraag a de grafiek van $g$ en geef het bijbehorende functievoorschrift.

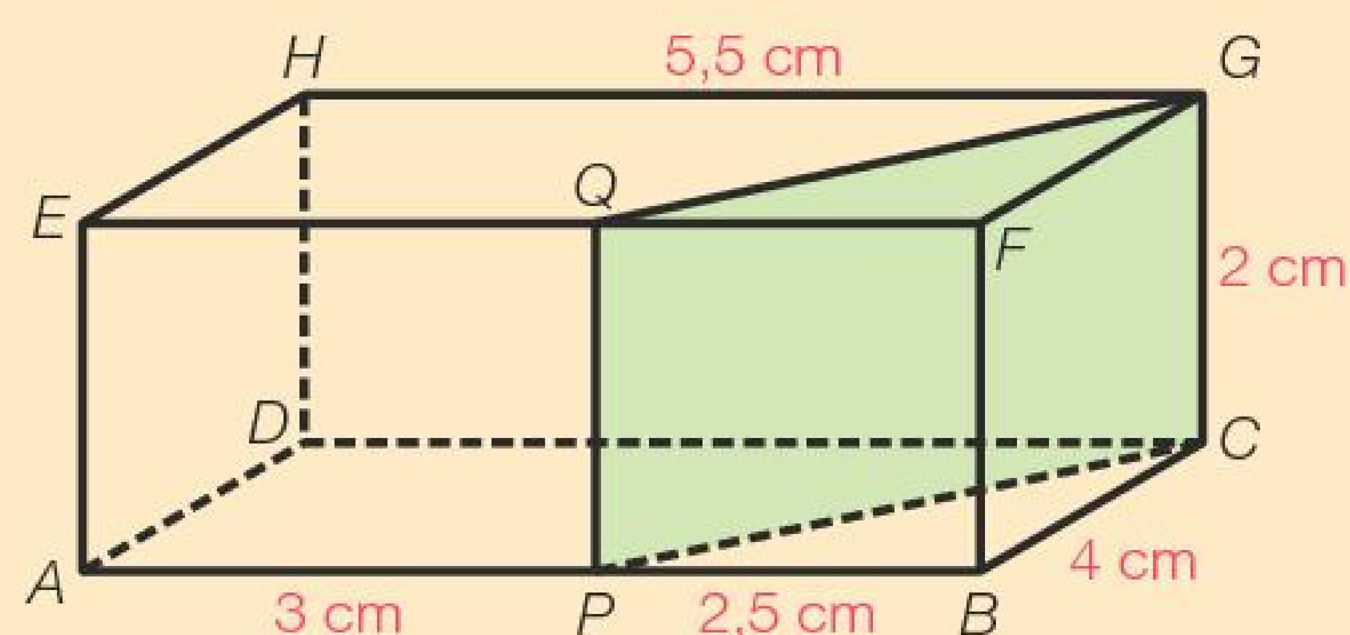
 

# 10 [MBO] Ruimtemeetkunde

## 10.1 Pythagoras en doorsnede

### Theorie A Doorsnede op ware grootte

In de figuur hiernaast is vlak *PCGQ* een **doorsnede** van de balk. Je kunt dit vlak op ware grootte tekenen.




Voorbeeld

Teken doorsnede *PCGQ* op ware grootte.

*Aanpak*

1 Je weet dat *CG* = 2 cm.

2 De lengte van *QG* kun je berekenen. Dat gaat zo:
Maak een schets van het bovenvlak *EFGH*. Zet er maten en letters bij.
Teken *QG* in de schets. Bereken de lengte van *QG* met de stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.

3 Teken de doorsnede op ware grootte. Gebruik de lengte van *QG* en van *CG*. Zet de maten en de letters erbij.

*Uitwerking*

Zie de schets hiernaast.

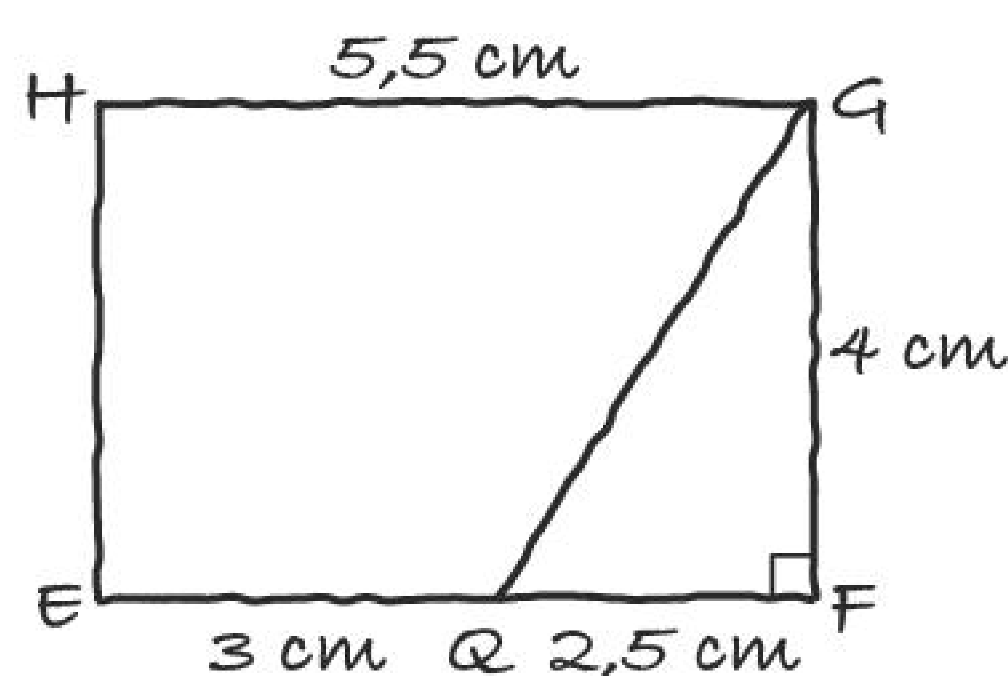
$\text{rhz}^2 = 6{,}25$

$\text{rhz}^2 = 16$ +

? $\text{sz}^2 = 22{,}25$

$\text{sz} = \sqrt{22{,}25} = 4{,}716...$

$QG = 4{,}7$ cm



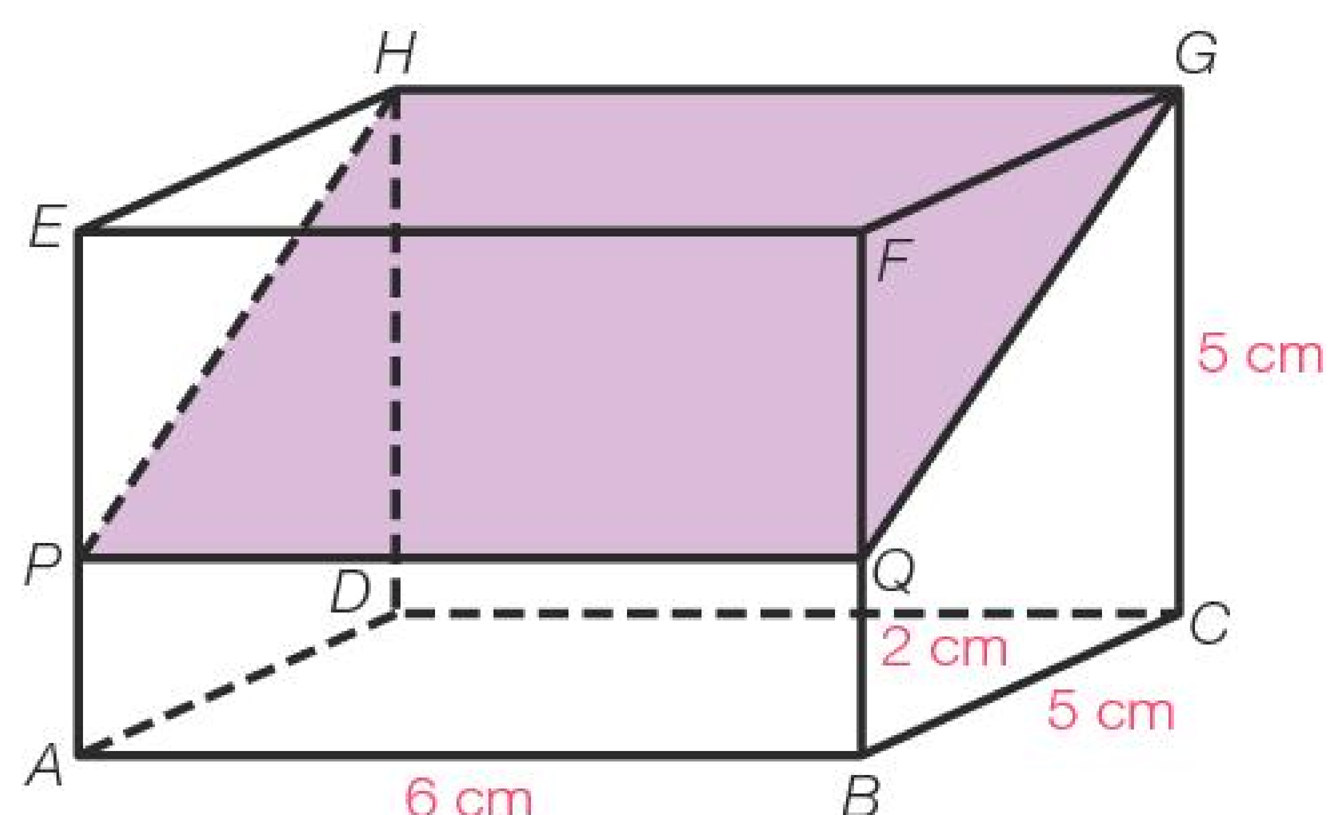
**1** In de balk hiernaast is de doorsnede *PQGH* getekend.

**a** Maak een schets van het rechterzijvlak met daarin *QG*. Zet er letters en maten bij.

**b** Bereken *QG* met de stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.

**c** Hoe lang is *PQ*?

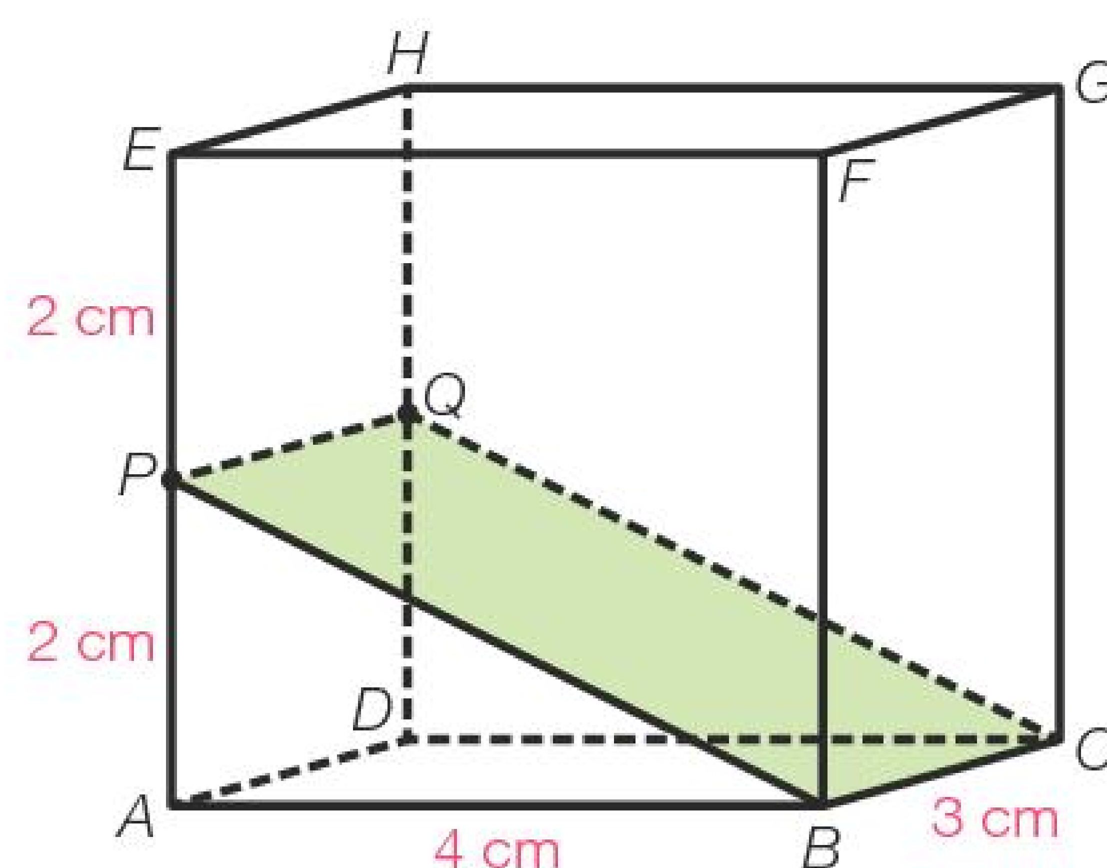
**d** Teken de doorsnede *PQGH* op ware grootte.



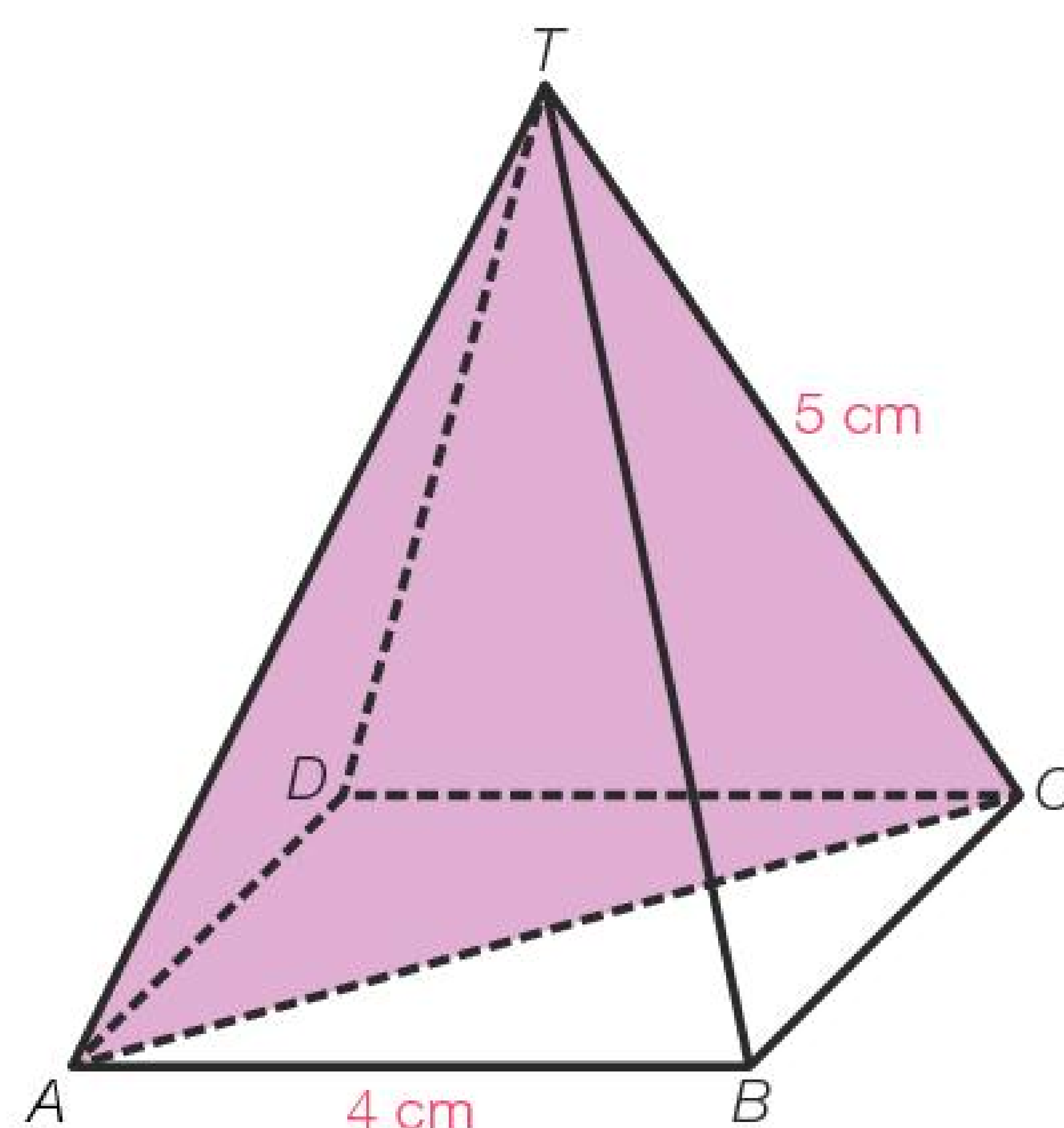

**2** In de balk hiernaast is doorsnede *PBCQ* getekend.

**a** Bereken *PB* met de stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.

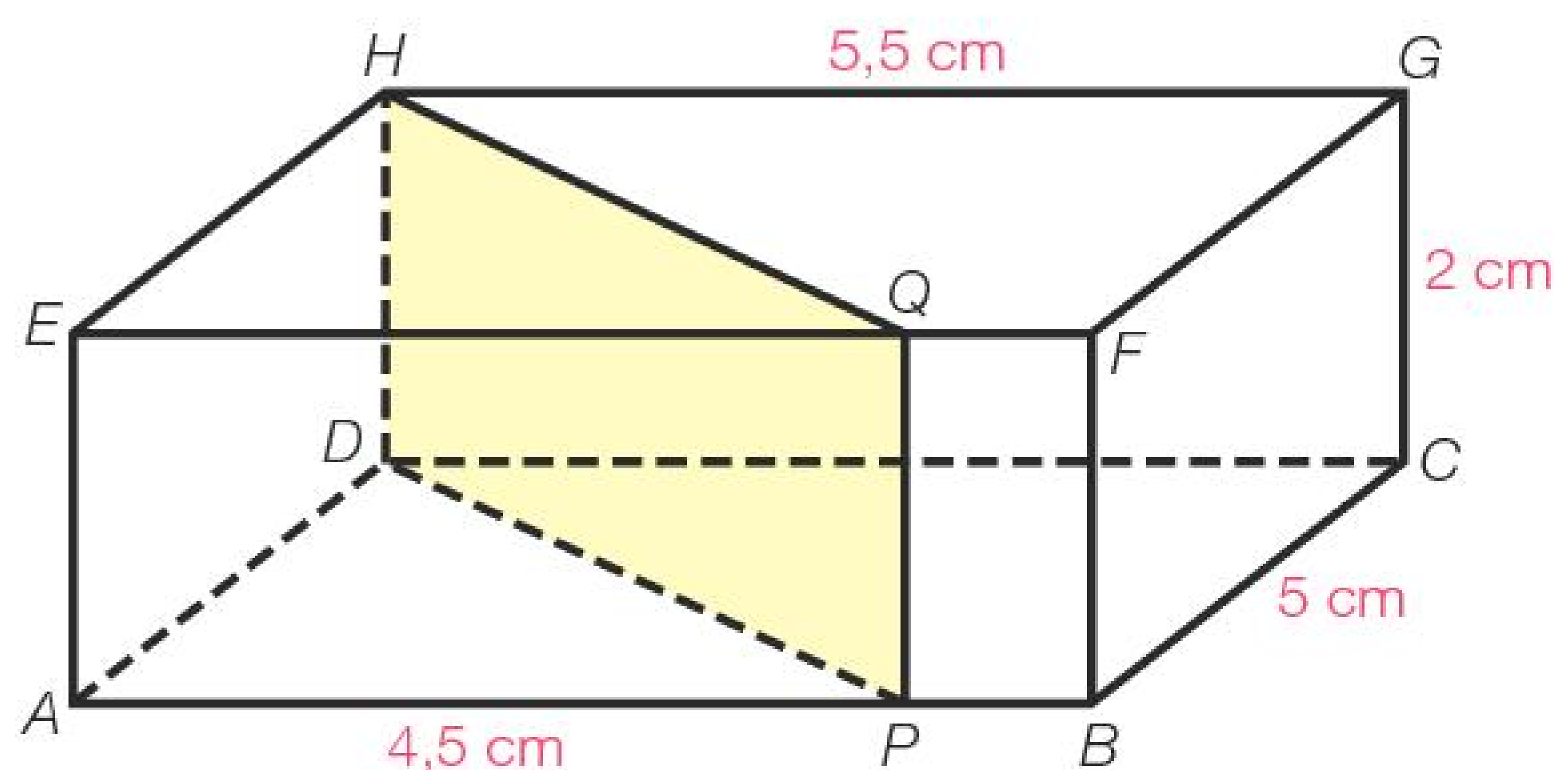
**b** Teken *PBCQ* op ware grootte.




**3** Het grondvlak van de piramide hiernaast is een vierkant met zijden van 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 5 cm.
Teken doorsnede *ACT* op ware grootte.



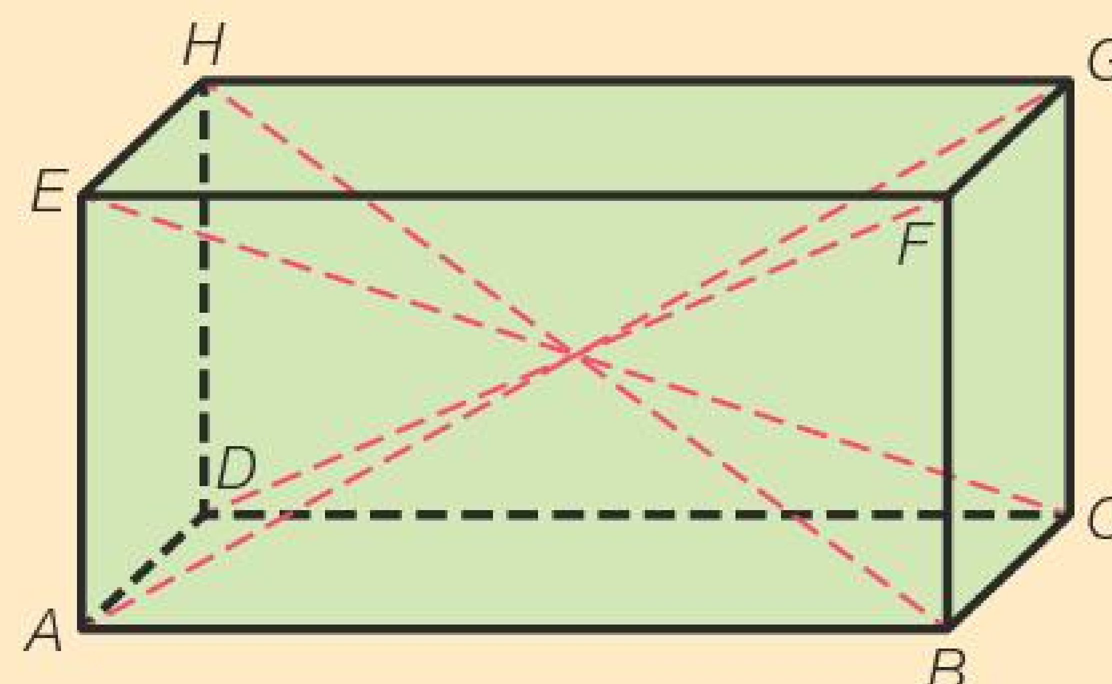

**4** In de balk hiernaast is een doorsnede getekend.
Teken doorsnede *DPQH* op ware grootte.



# 10.2 Berekeningen in de ruimte

## Theorie A Pythagoras en goniometrie in de ruimte

Een balk en een kubus hebben vier lichaamsdiagonalen. In de balk hiernaast zijn alle vier de lichaamsdiagonalen getekend: *AG, BH, CE* en *DF*.
De vier lichaamsdiagonalen zijn even lang. De lengte van een lichaamsdiagonaal kun je snel berekenen met de **verlengde stelling van Pythagoras**.

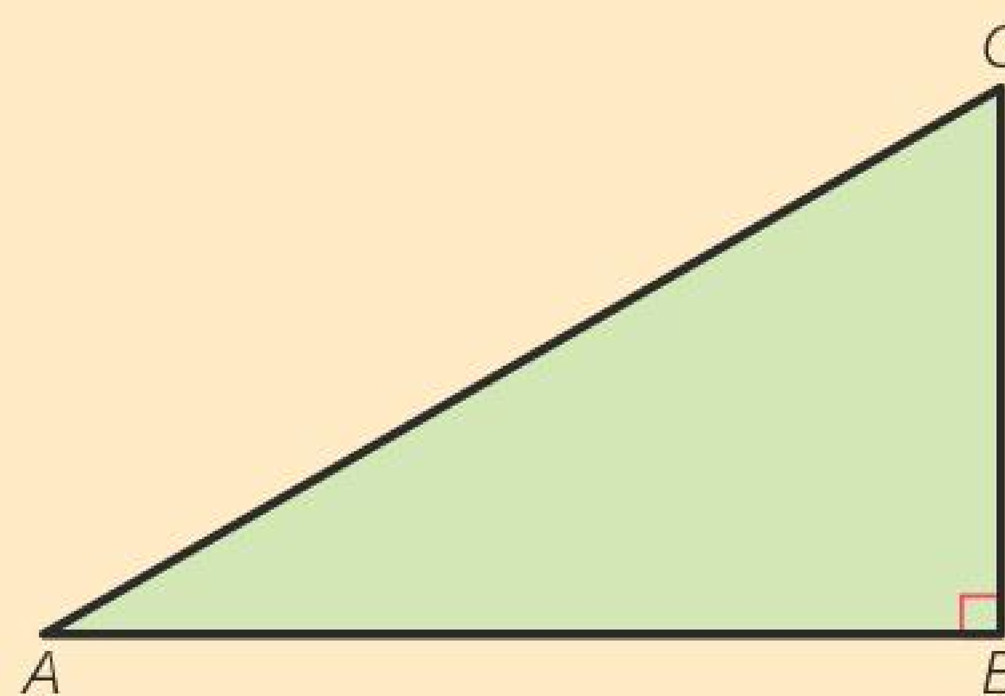



In de balk met lichaamsdiagonalen zie je allerlei hoeken. Het is mogelijk om met goniometrie die hoeken te berekenen. Om een hoek te berekenen met goniometrie zoek je altijd een rechthoekige driehoek. Bij een rechthoekige driehoek horen de verhoudingen sinus, cosinus en tangens.
Je kunt ze onthouden met het ezelsbruggetje SOS CAS TOA.
Voor de rechthoekige driehoek *ABC* hiernaast horen bij $\angle A$ drie goniometrische verhoudingen:

$$\text{Sin } \angle A = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Cos } \angle A = \frac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

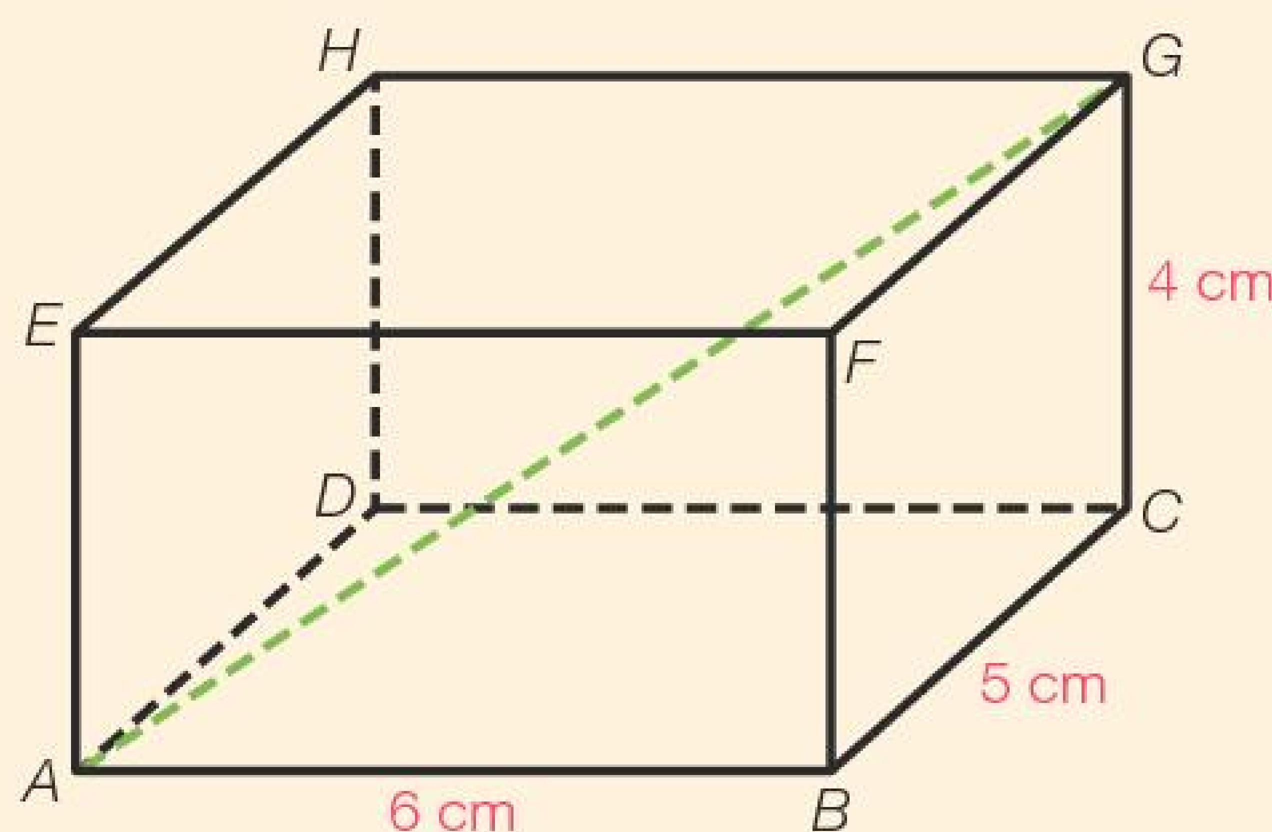
$$\text{Tan } \angle A = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{BC}{AB}$$




### Voorbeeld

Bekijk de balk hiernaast.

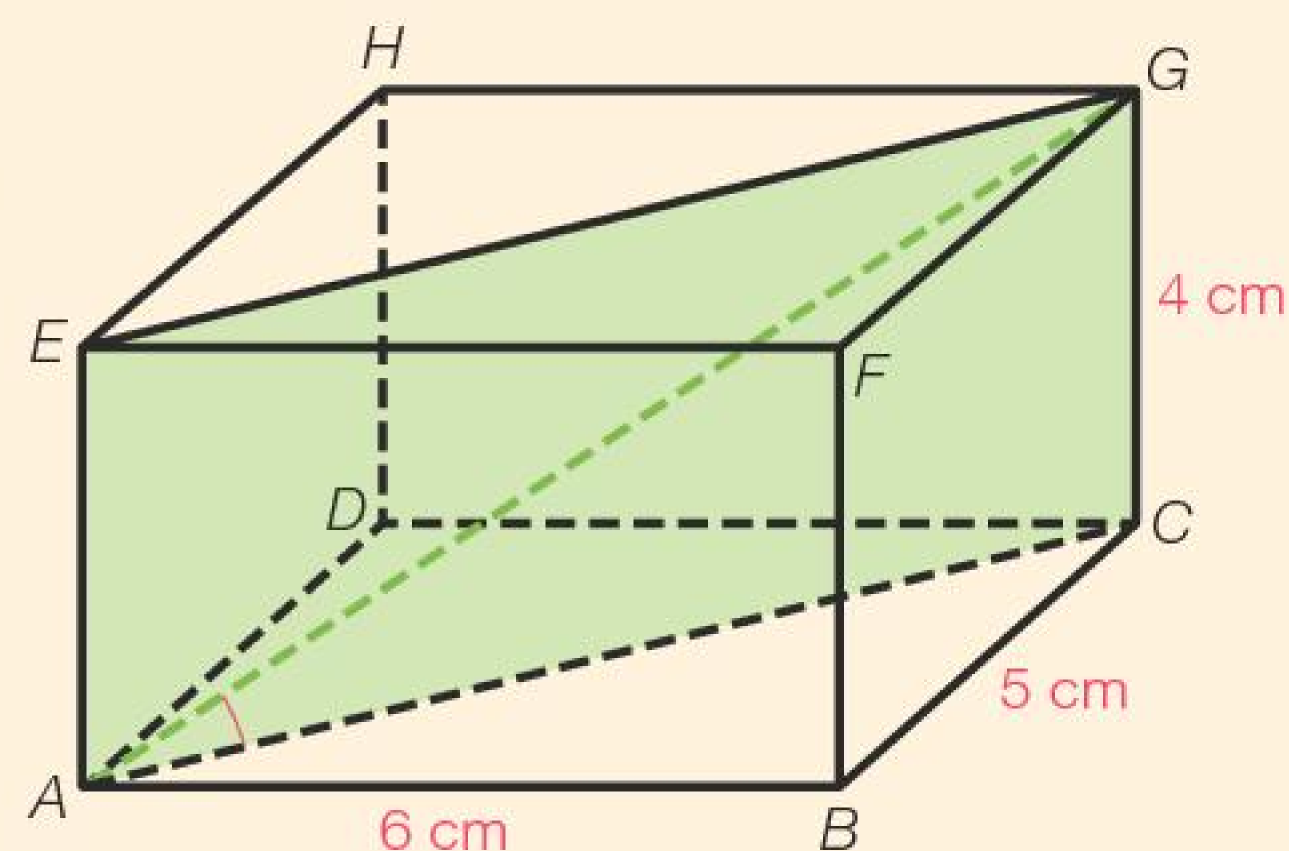
**a** Bereken *AG*. Rond af op één decimaal.
**b** Bereken $\angle CAG$.




*Aanpak*

**a** Ga van *A* naar *G* via drie ribben.
Bijvoorbeeld $AB \rightarrow BC \rightarrow CG$.
De lengte van deze drie ribben gebruik je om *AG* te berekenen.

**b** $\angle CAG$ ligt in diagonaalvlak $ACGE$.
Maak een schets van dat diagonaalvlak.
Teken hierin $AG$.
Van $\angle CAG$ weet je de **o**verstaande rechthoekszijde en de **s**chuine zijde, **SOS**, gebruik dus sinus.



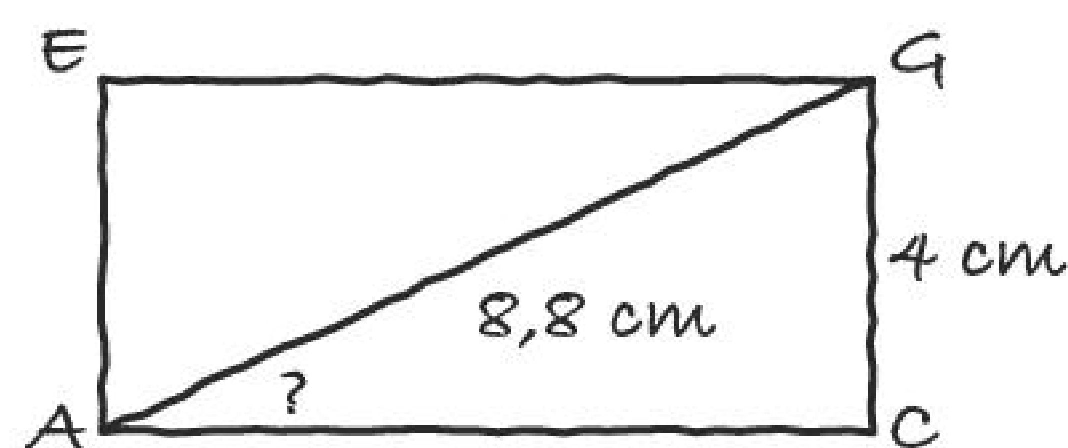

*Uitwerking*

**a** $rhz^2 = 36$
$rhz^2 = 25$
$rhz^2 = 16$
——————— +
$? \; sz^2 = 77$
$sz = \sqrt{77} = 8{,}774...$
$AG = 8{,}8$ cm

**b** Zie de schets hiernaast.

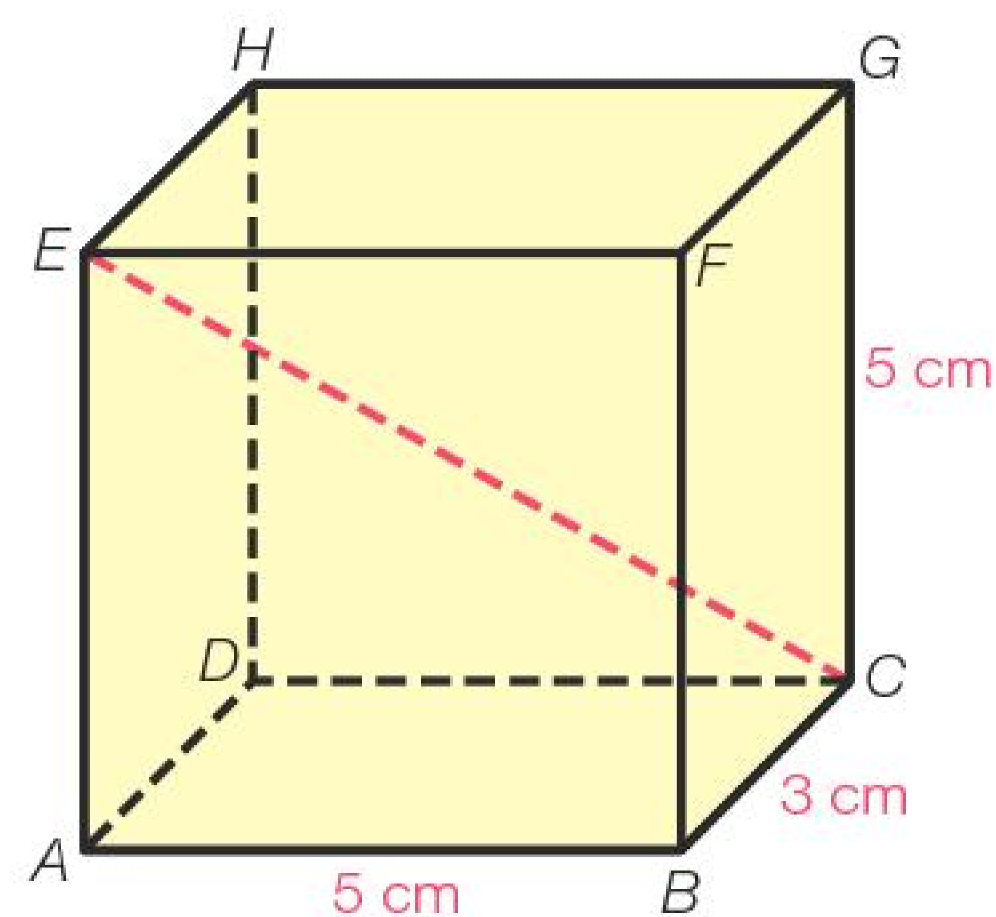
$\sin \angle CAG = \dfrac{4}{8{,}8}$

$\angle CAG = 27°$



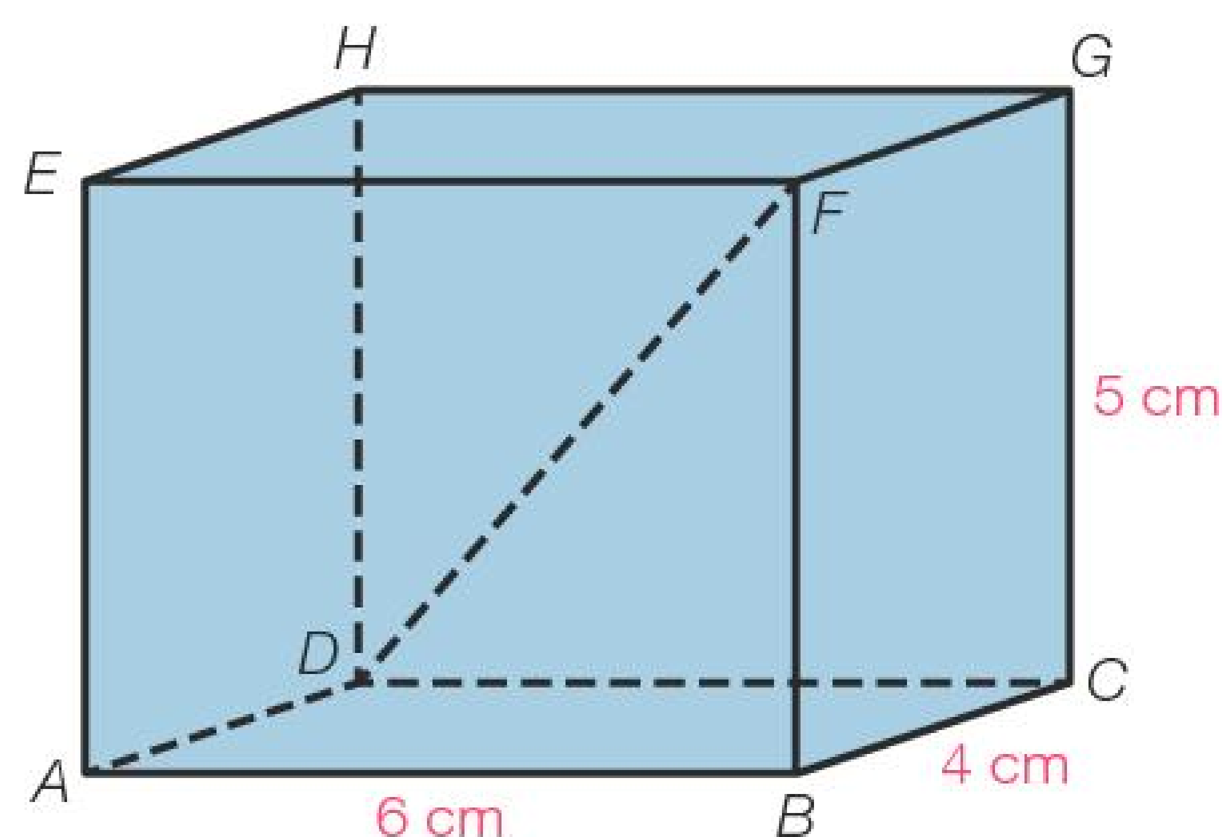

**5** Je gaat $\angle AEC$ berekenen in de balk hiernaast. Hiervoor heb je de lengte van $AE$ en $CE$ nodig.

**a** Bereken $CE$. Gebruik de verlengde stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.
**b** Maak een schets van diagonaalvlak $ACGE$ en teken $CE$ in de schets. Zet alle maten erbij die je weet.
**c** Bereken $\angle AEC$. Gebruik de cosinus.




**6** Bekijk de balk hiernaast.

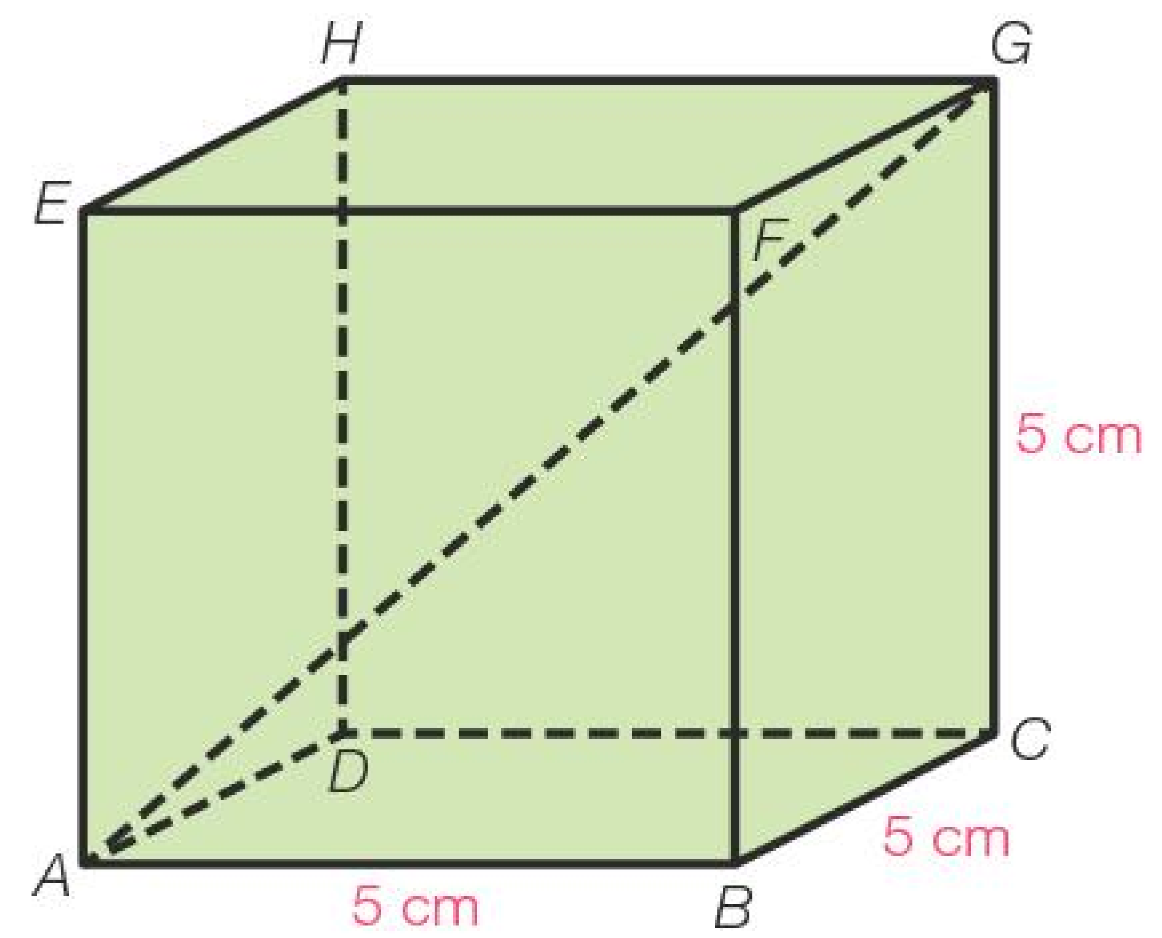
**a** Bereken $DF$. Rond af op één decimaal.
**b** In welk diagonaalvlak ligt $\angle HDF$?
**c** Maak een schets van dit diagonaalvlak.
**d** Bereken $\angle HDF$.



**7** Hiernaast is een kubus met ribben van 5 cm getekend.

**a** Bereken $AG$. Rond af op één decimaal.

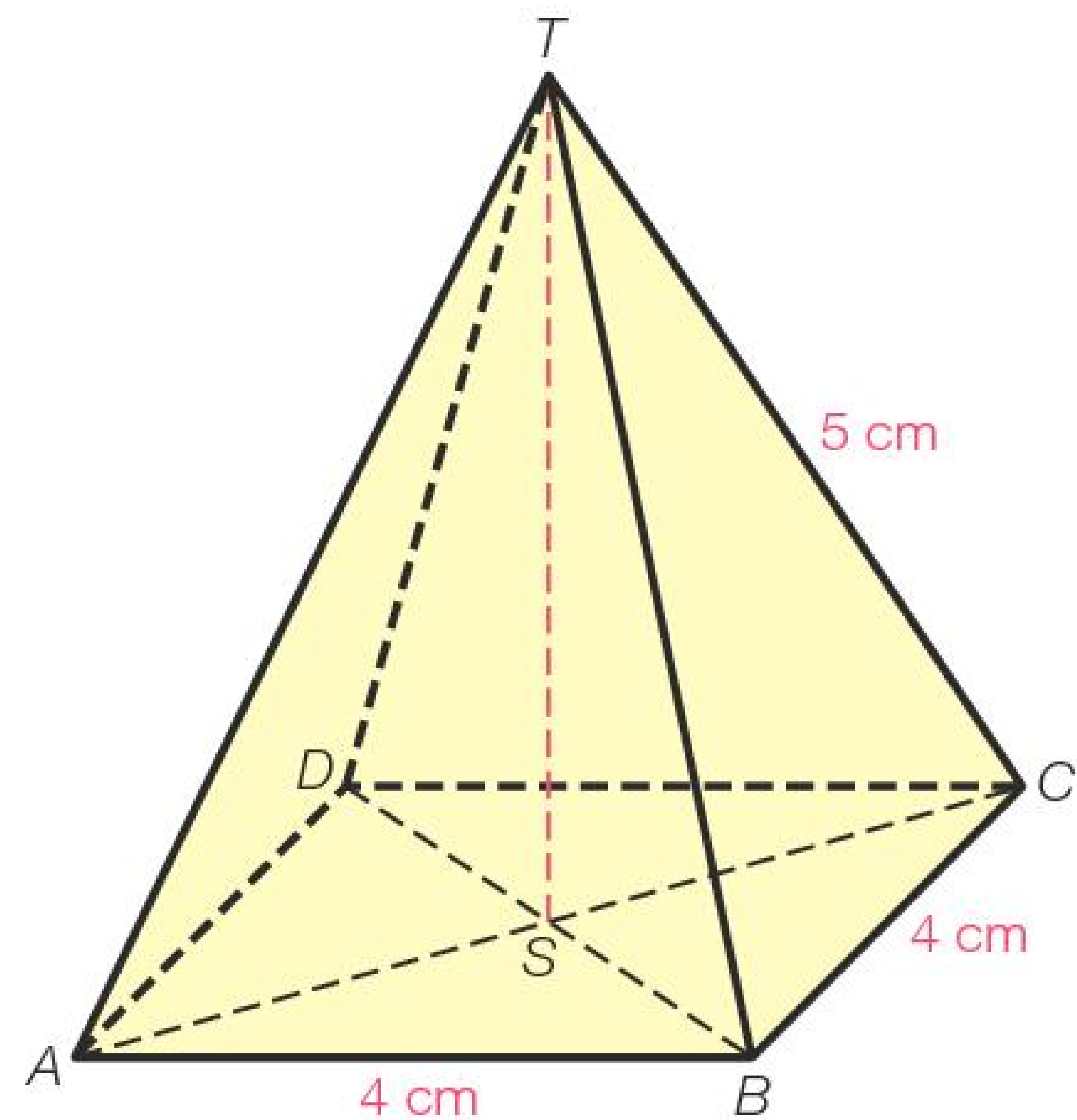
**b** Bereken $\angle BAG$.




**8** Van de piramide hiernaast is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 5 cm.

**a** Bereken $AC$ en $AS$. Rond af op twee decimalen.

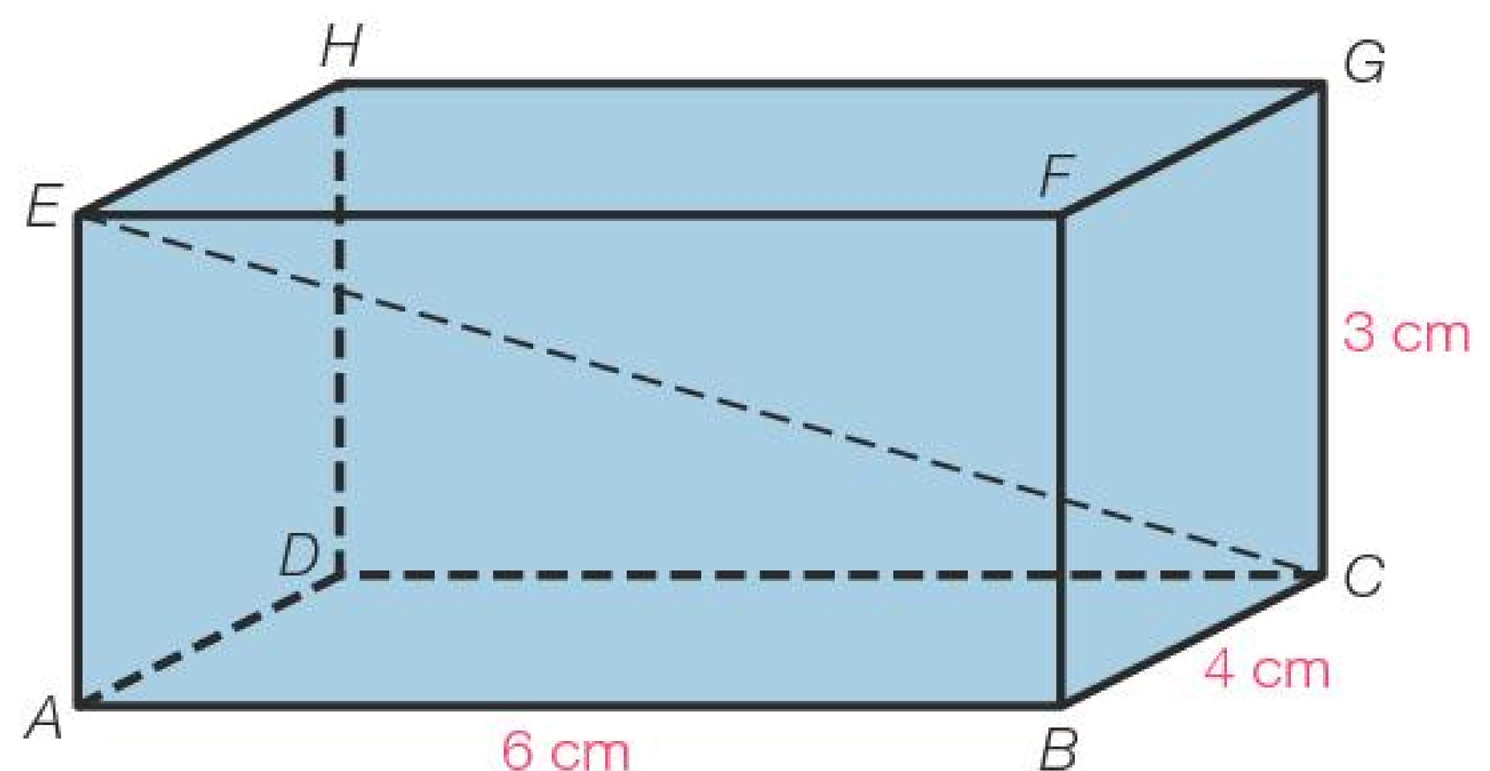
**b** Bereken $\angle TAS$.




**9** Bekijk de balk hiernaast.

**a** Bereken $CE$. Rond af op één decimaal.

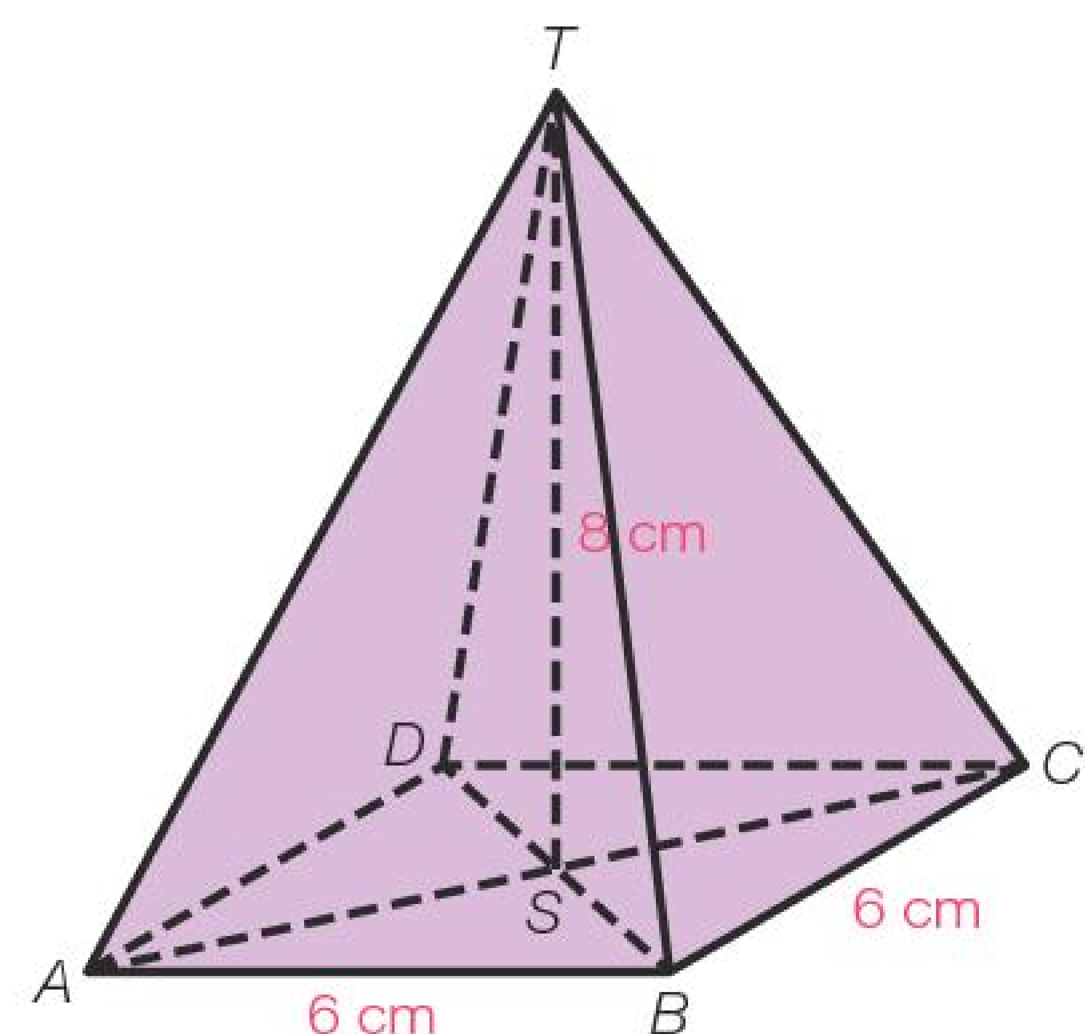
**b** Bereken $\angle DCE$.




**10** Van de regelmatige piramide hiernaast is het grondvlak een vierkant met zijden van 6 cm. De hoogte $ST = 8$ cm.

**a** Bereken $AS$. Rond af op één decimaal.

**b** Bereken $\angle SAT$.

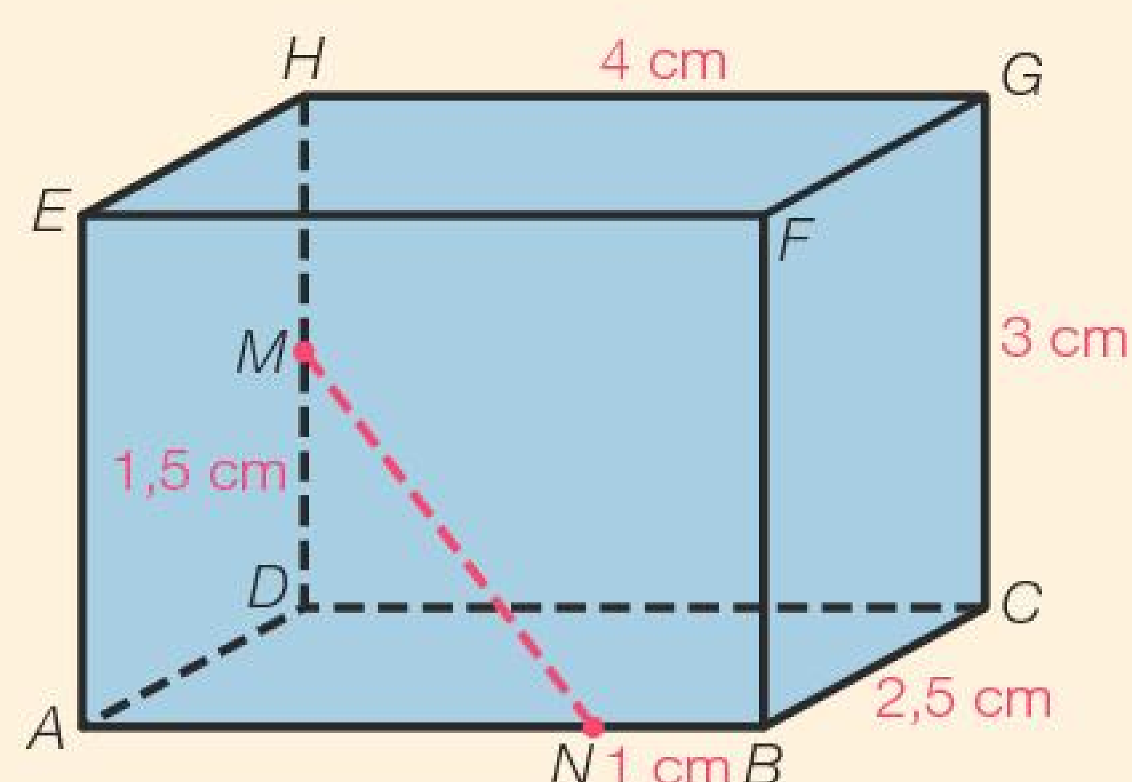


## Theorie B Lengte lijnstukken in balken

Zijn twee punten op de ribben van een balk verbonden door een lijnstuk, dan kun je met de verlengde stelling van Pythagoras de lengte van dat lijnstuk berekenen. Je gebruikt de kortste route van het ene punt, via de ribben van de balk, naar het andere punt.

### Voorbeeld

Bereken de lengte van *NM*. Rond af op één decimaal.




*Aanpak*

Ga van *N* naar *M* over drie ribben of gedeeltes van ribben, dus $NA \rightarrow AD \rightarrow DM$ met $NA = 3$ cm, $AD = 2,5$ cm en $DM = 1,5$ cm.

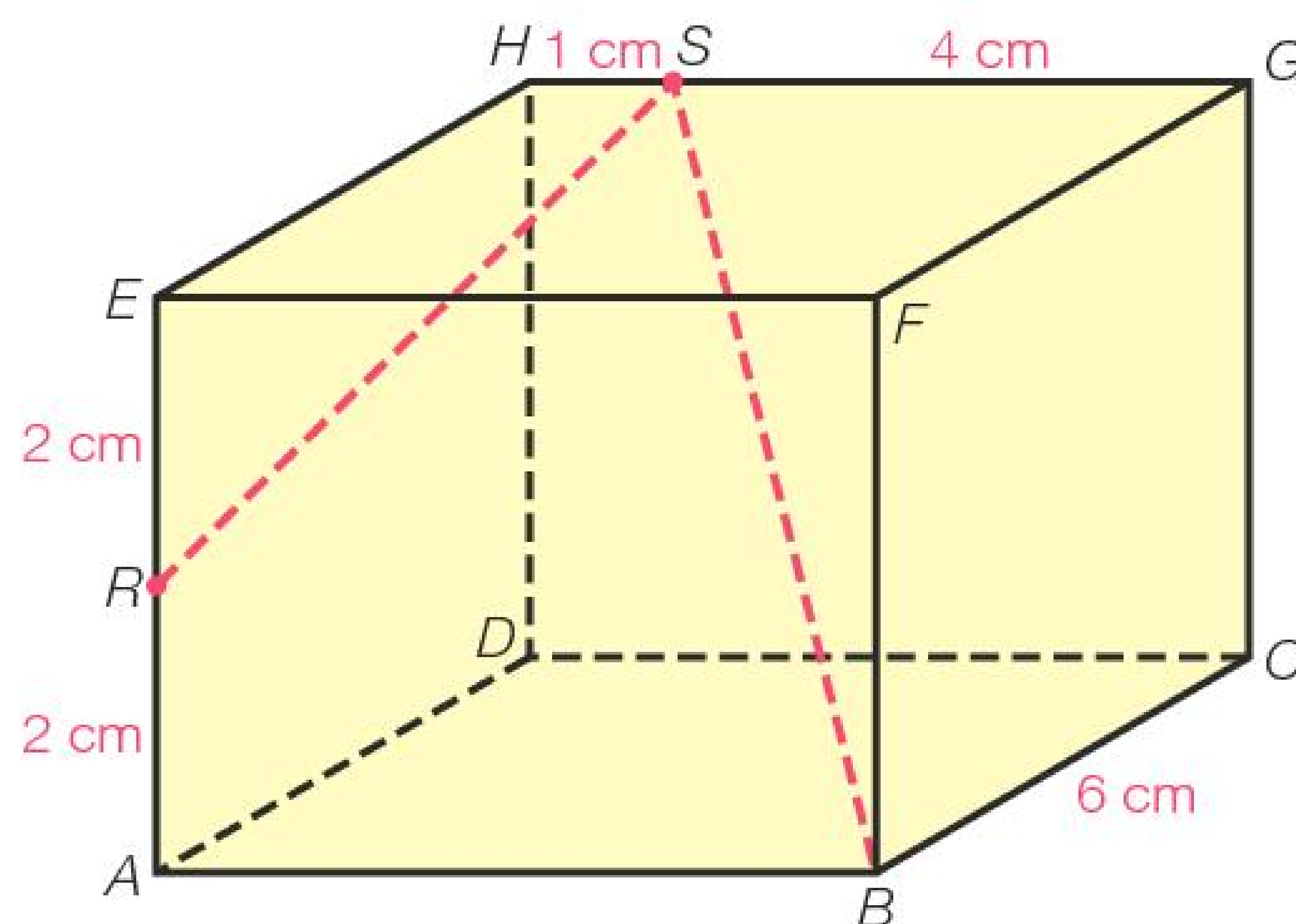
*Uitwerking*

$rhz^2 = 9$
$rhz^2 = 6,25$
$rhz^2 = 2,25$ +
$? \; sz^2 = 17,5$
$sz = \sqrt{17,5} = 4,183...$
$NM = 4,2$ cm

**11** Bekijk de balk hiernaast.

**a** Bereken de lengte van *BS*. Rond af op één decimaal.

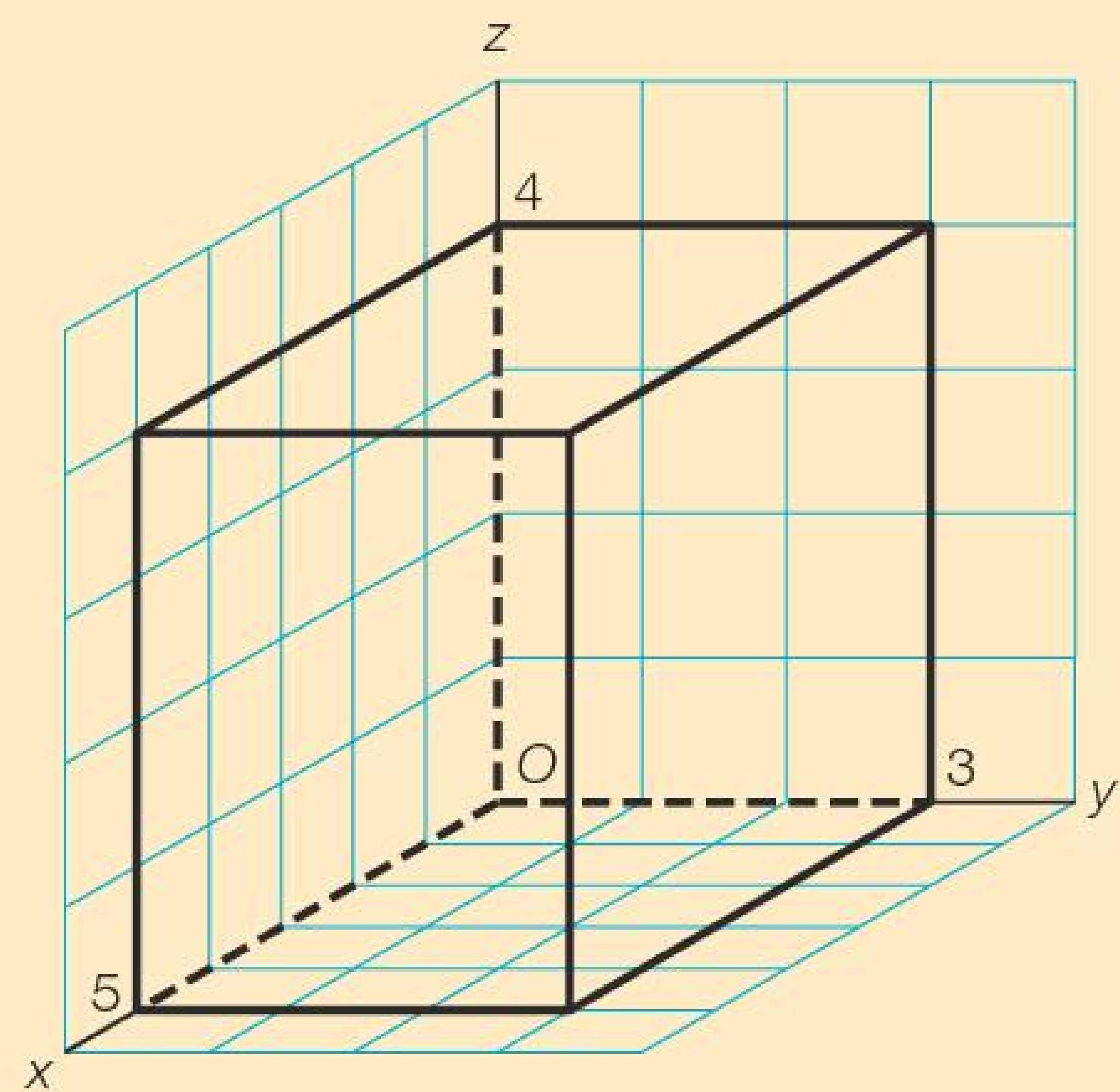
**b** Bereken de lengte van *RS*. Rond af op één decimaal



# 10.3 Coördinaten in de ruimte

## Theorie A Driedimensionaal assenstelsel

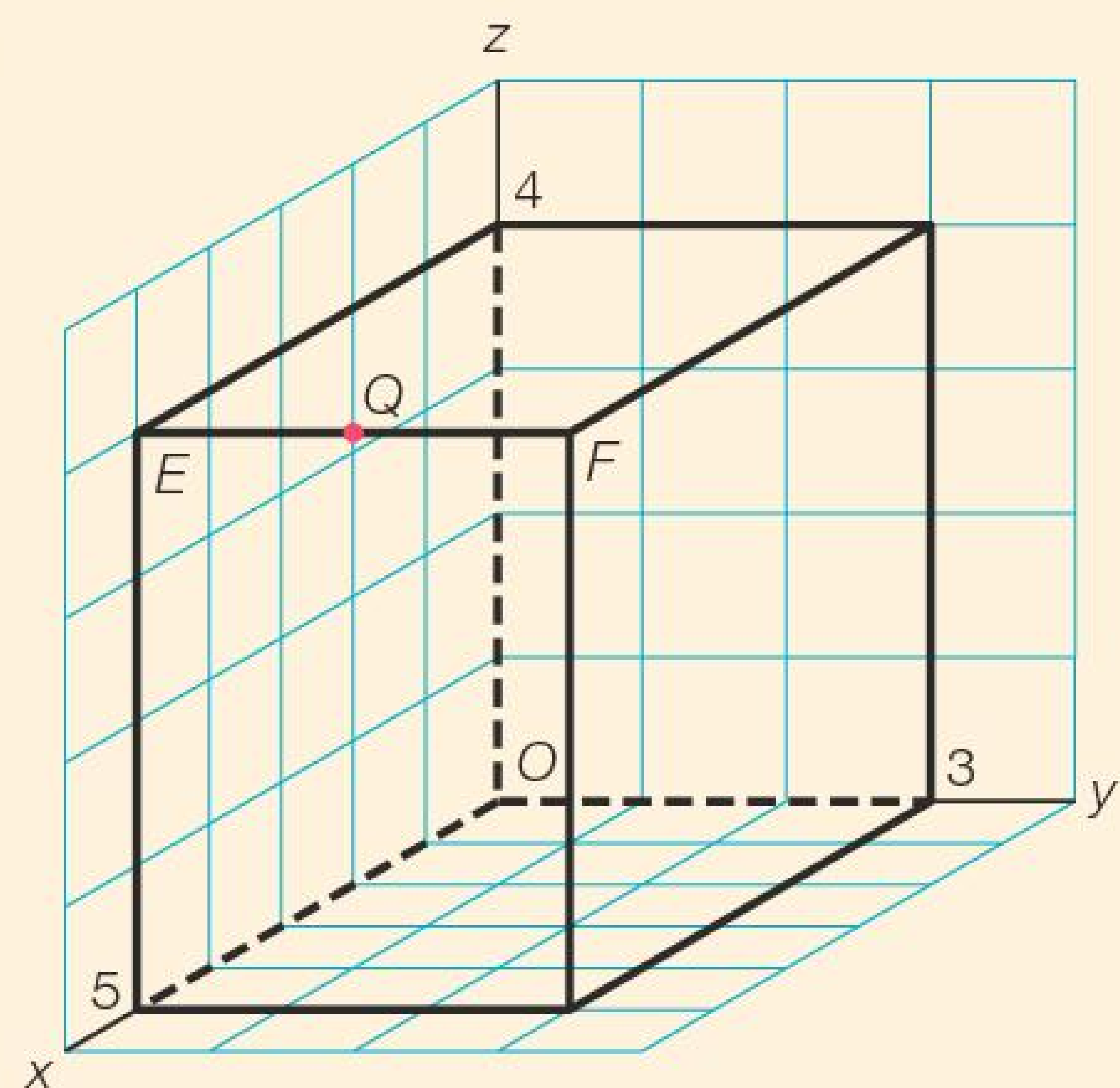
Ruimte heeft drie dimensies, een lengte een breedte en een hoogte. Daarom heb je in de ruimte drie assen nodig, de *x*-as, de *y*-as en de *z*-as. Om een punt in de ruimte aan te geven, gebruik je drie coördinaten, de *x*-coördinaat, de *y*-coördinaat en de *z*-coördinaat. Een assenstelsel in de ruimte heet een **driedimensionaal assenstelsel**.




### Voorbeeld

In de balk hiernaast is $Q$ het midden van $EF$.

**a** Welke coördinaten horen bij punt $F$?
**b** Welke coördinaten horen bij punt $Q$?




*Aanpak*

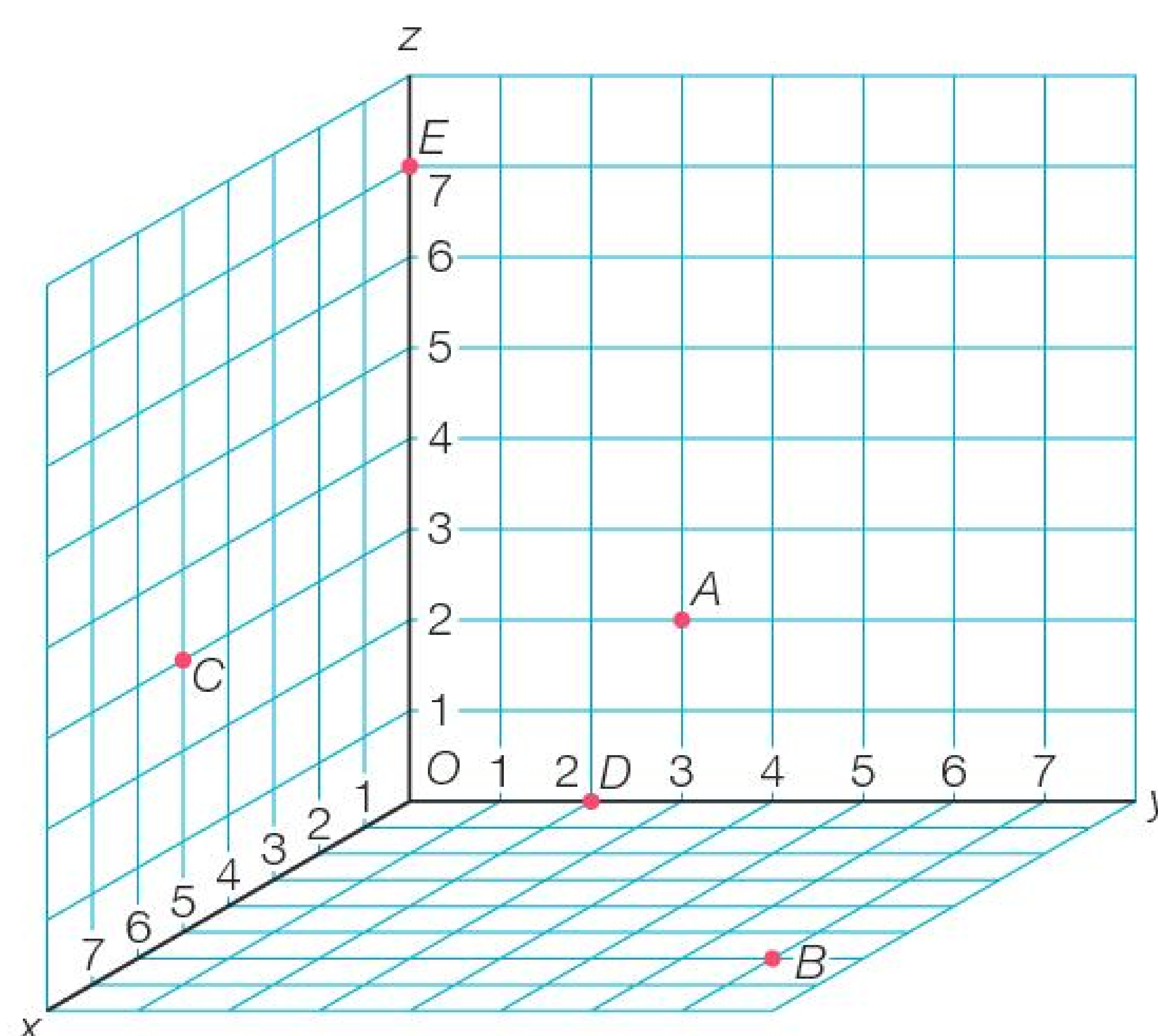
**a** Voor punt $F$ ga je vanuit de oorsprong
5 stappen in de *x*-richting
3 stappen in de *y*-richting
4 stappen in de *z*-richting.

**b** Voor punt $Q$ ga je vanuit de oorsprong
5 stappen in de *x*-richting
1,5 stap in de *y*-richting
4 stappen in de *z*-richting.

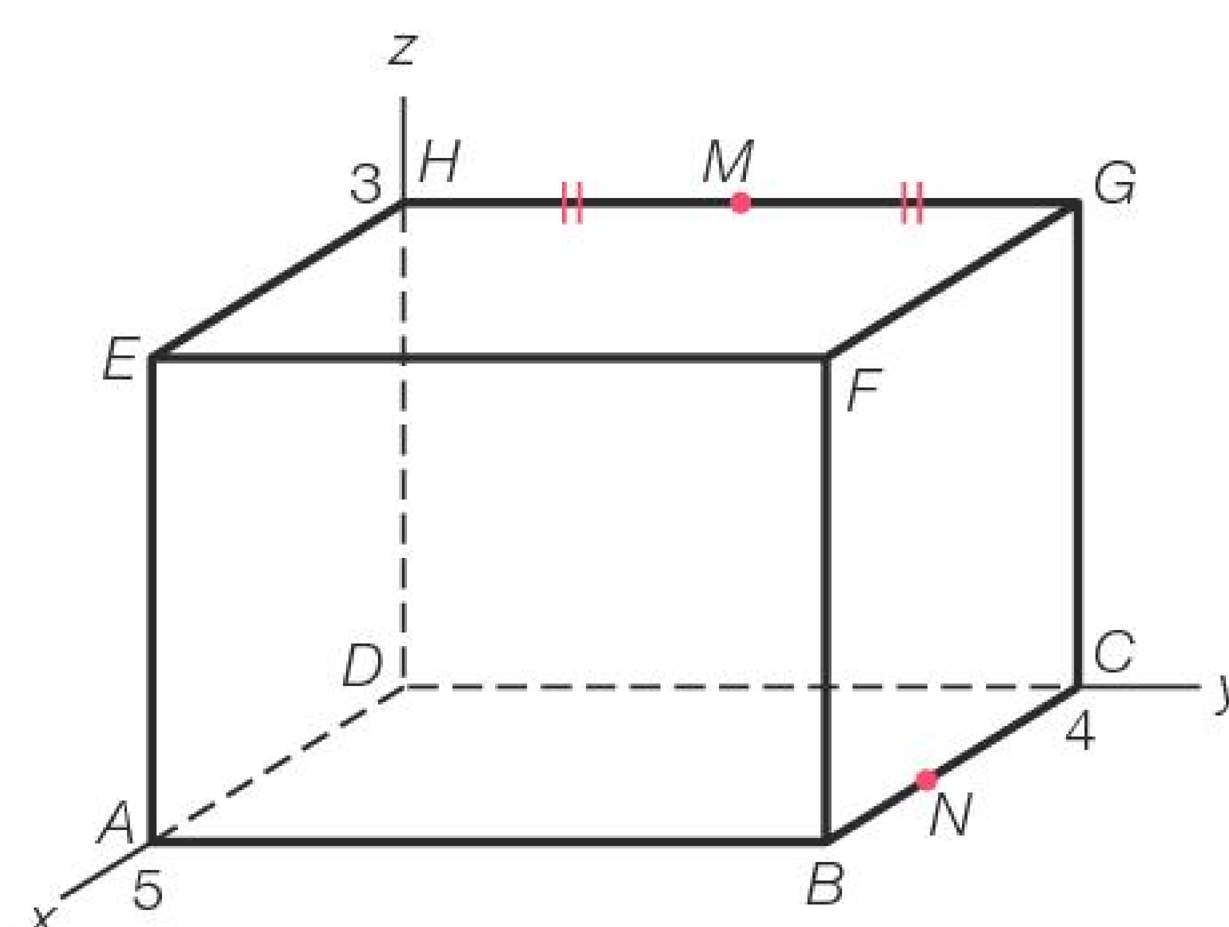
*Uitwerking*

**a** De coördinaten van punt $F$ zijn $(5, 3, 4)$.
**b** De coördinaten van punt $Q$ zijn $(5, 1\frac{1}{2}, 4)$.

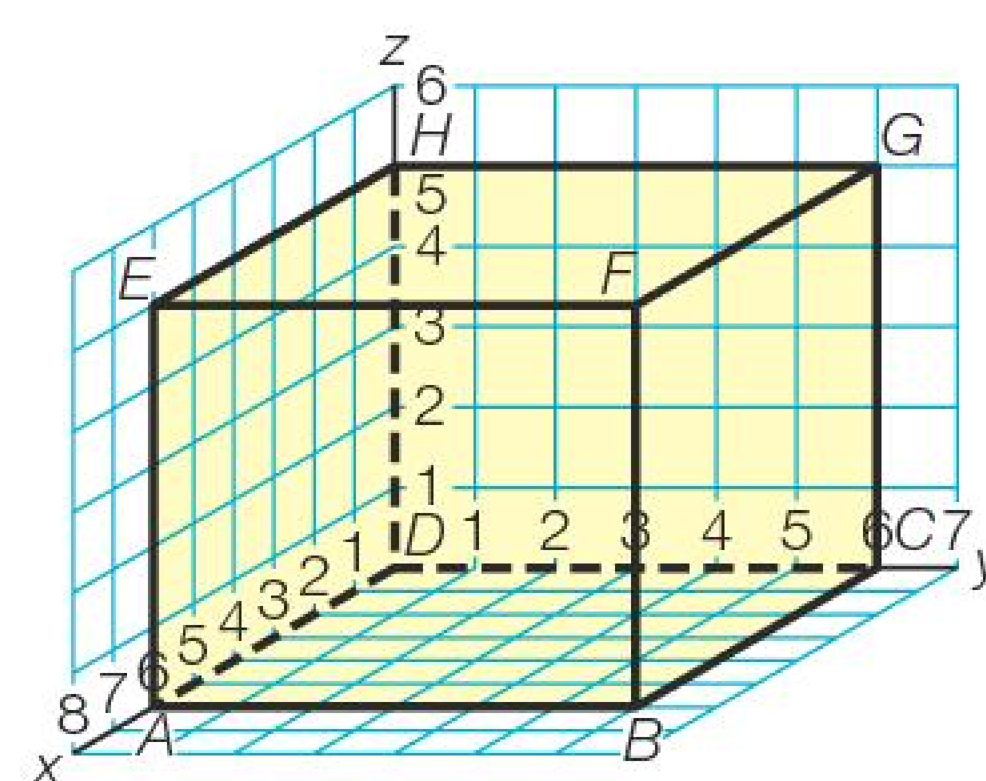
**12** **a** In de figuur hiernaast zie je drie assen. Schrijf de namen van de assen op.
**b** Leg uit dat het punt $A$ de coördinaten (0, 3, 2) heeft.
**c** Schrijf de coördinaten op van de punten $B$, $C$, $D$ en $E$.



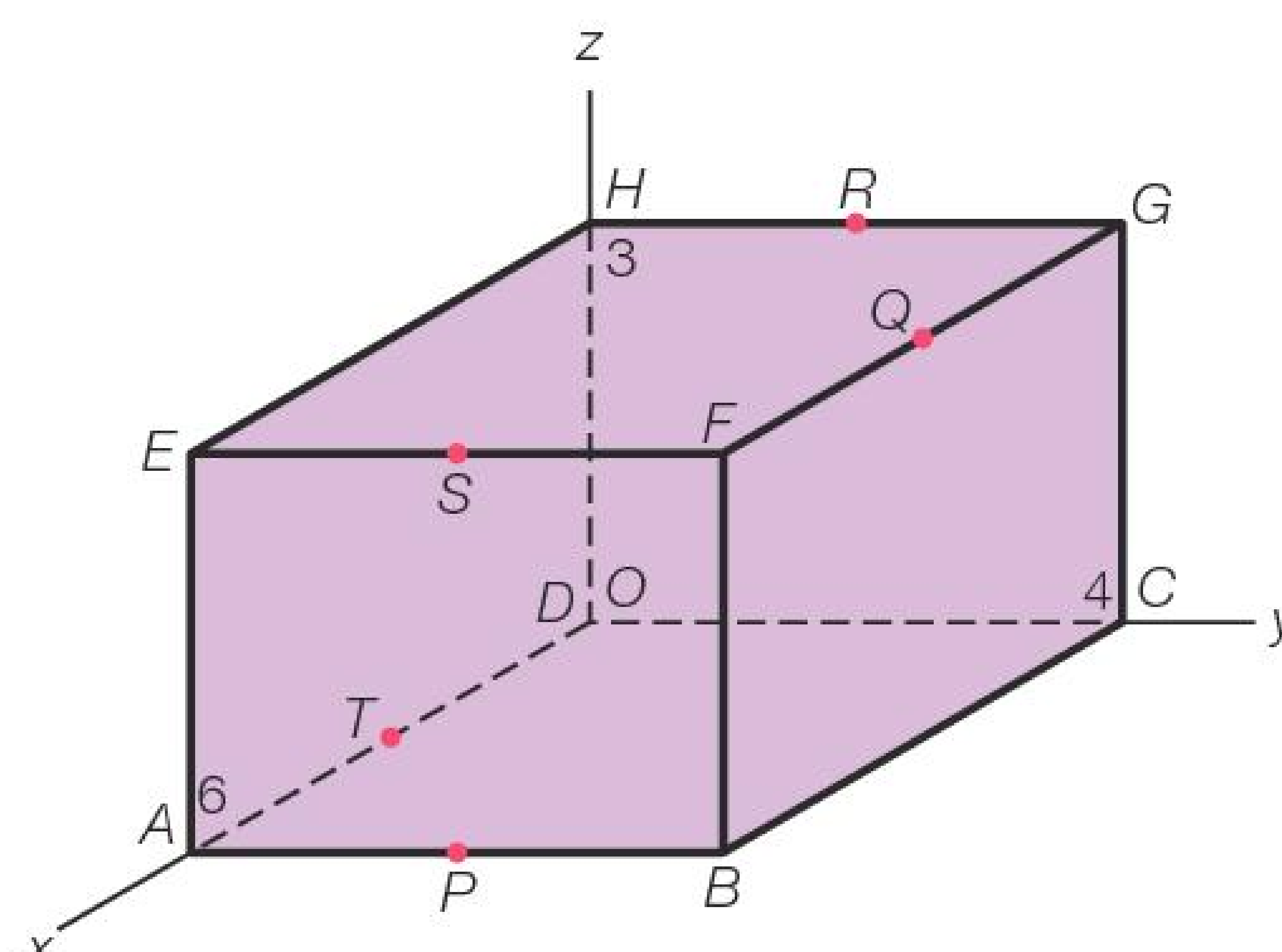

**13** Bij hoekpunt $H$ van de balk hiernaast horen de coördinaten (0, 0, 3).
**a** Welke coördinaten horen bij hoekpunt $A$?
**b** Welke coördinaten horen bij hoekpunt $C$?
**c** Punt $M$ is het midden van ribbe $GH$. Welke coördinaten horen bij $M$?
**d** De $x$-coördinaat van punt $N$ is 4. Schrijf de coördinaten van $N$ op.




**14** In het assenstelsel hiernaast is een balk getekend. Punt $D$ staat in de oorsprong. Daarom heeft $D$ de coördinaten (0, 0, 0).
Schrijf de coördinaten op van de andere hoekpunten van de balk.




**15** De punten $P$, $Q$, $R$, $S$ en $T$ zijn de middens van ribben van de balk hiernaast.
Schrijf de coördinaten van die punten op.



# Uitwerkingen

# 1 [HAVO-A] Procenten

**Bladzijde 4**

**1** **a** $0{,}49 \times 369{,}5 \approx 181{,}1$
**b** $1{,}21 \times 89{,}23 \approx 108{,}0$
**c** $0{,}34 \times 921 \approx 313{,}1$

**2** **a** $0{,}89 \times 59{,}92 \approx$ €53,33
**b** $1{,}43 \times 89{,}98 \approx$ €128,67
**c** $0{,}0045 \times 598{,}20 \approx$ €2,69
**d** $0{,}005 \times 2346{,}99 \approx$ €11,73

**Bladzijde 5**

**3** **a** 1,058
**b** 0,875
**c** $1{,}12 \times 750 = 840$
**d** $0{,}84 \times 550 = 462$

**Bladzijde 6**

**4** **a** De vermenigvuldigingsfactor is 1,06.
**b** De vermenigvuldigingsfactor is 0,35.
**c** De vermenigvuldigingsfactor is 0,9875.
**d** De vermenigvuldigingsfactor is 2,201.
**e** De vermenigvuldigingsfactor is 1,0035.
**f** De vermenigvuldigingsfactor is 0,895.

**5** De nieuwe prijs is $0{,}865 \times 385{,}95 \approx$ €333,85.

**6** Het huis is na een jaar $1{,}115 \times 249\,500 =$ €278 192,50 waard.

**7** **a** $0{,}059 \times 50 = 2{,}95$
**b** De nieuwe prijs is $0{,}921 \times 29{,}95 \approx$ €27,58.
**c** De vermenigvuldigingsfactor is 1,047.
**d** Je krijgt $0{,}965 \times 1600 = 1544$.

**8** **a** $\frac{5}{25} \times 100\% = 20\%$
**b** $\frac{821}{5390} \times 100\% \approx 15{,}2\%$

**Bladzijde 7**

**9** **a** $\frac{0{,}3}{2} \times 100\% = 15\%$
**b** $\frac{4{,}9}{34{,}3} \times 100\% \approx 14{,}3\%$
**c** $\frac{1}{9{,}3} \times 100\% \approx 10{,}8\%$
**d** $\frac{5{,}42}{89{,}23} \times 100\% \approx 6{,}1\%$

**10** **a** In totaal zitten er $1238 + 324 = 1562$ mensen in het publiek.
**b** $\frac{324}{1562} \times 100\% \approx 20{,}7\%$ van het publiek is vrouw.

**11** **a** $\frac{97}{218} \times 100\% \approx 44{,}5\%$
**b** $0{,}43 \times 18\,500 = 7955$
**c** $0{,}003 \times 692{,}55 \approx €\,2{,}08$

**12** **a** $2{,}45 \times 295 = 722{,}75$
**b** $\frac{234{,}98}{975{,}39} \times 100\% \approx 24{,}1\%$
**c** $0{,}029 \times 21\,653 \approx €\,627{,}94$

**13** **a** $\frac{18}{28} \times 100\% \approx 64{,}3\%$ komt met de fiets naar school.
**b** $\frac{8}{28} \times 100\% \approx 28{,}6\%$ komt met het openbaar vervoer.

**14** **a** Het bedrag is nu $1{,}41 \times 296 = €\,417{,}36$.
**b** $\frac{45}{1269} \times 100\% \approx 3{,}5\%$
**c** De vermenigvuldigingsfactor is 0,787.
**d** $\frac{6}{27} \times 100\% \approx 22{,}2\%$ van de leerlingen draagt een bril.
**e** $0{,}62 \times 829{,}45 \approx €\,514{,}26$
**f** Het huis is nu $1{,}062 \times 267\,500 = €\,284\,085$ waard.
**g** De webshop heeft nu $1{,}25 \times 1240 = 1550$ artikelen in het assortiment.

**Bladzijde 8**

**15** **a** OUD = 560 en NIEUW = 620.
$\frac{620 - 560}{560} \times 100\% \approx 10{,}7\%$, dus de procentuele toename is 10,7%.
**b** OUD = 380 en NIEUW = 300.
$\frac{300 - 380}{380} \times 100\% \approx -21{,}1\%$, dus de procentuele afname is 21,1%.

**Bladzijde 9**

**16** **a** OUD = 18 en NIEUW = 20,5.
$\frac{20{,}5 - 18}{18} \times 100\% \approx 13{,}9\%$, dus de procentuele toename is 13,9%.
**b** OUD = 412 en NIEUW = 368.
$\frac{368 - 412}{412} \times 100\% \approx -10{,}7\%$, dus de procentuele afname is 10,7%.
**c** OUD = 0,075 en NIEUW = 0,092.
$\frac{0{,}092 - 0{,}075}{0{,}075} \times 100\% \approx 22{,}7\%$, dus de procentuele toename is 22,7%.
**d** OUD = 5,12 en NIEUW = 4,56.
$\frac{4{,}56 - 5{,}12}{5{,}12} \times 100\% \approx -10{,}9\%$, dus de procentuele afname is 10,9%.

**17** OUD = 21,99 en NIEUW = 23,95.
$\frac{23,95 - 21,99}{21,99} \times 100\% \approx 8,9\%$, dus de rekenmachine is 8,9% duurder geworden.

**18** OUD = 12 345 en NIEUW = 10 846.
$\frac{10\,846 - 12\,345}{12\,345} \times 100\% \approx -12,1\%$, dus de auto is 12,1% goedkoper geworden.

**19** **a** OUD = 1200 en NIEUW = 1059.
$\frac{1059 - 1200}{1200} \times 100\% \approx -11,8\%$, dus de scooter is 11,8% goedkoper geworden.

**b** OUD = 1379 en NIEUW = 1212.
$\frac{1212 - 1379}{1379} \times 100\% \approx -12,1\%$, dus het aantal leerlingen is met 12,1% gedaald.

**c** OUD = 45 en NIEUW = 32.
$\frac{32 - 45}{45} \times 100\% \approx -28,9\%$, dus de zonnebril is 28,9% goedkoper geworden.

**d** OUD = 28,50 en NIEUW = 29,50.
$\frac{29,50 - 28,50}{28,50} \times 100\% \approx 3,5\%$, dus een kaartje is 3,5% duurder geworden.

**20** **a** De vermenigvuldigingsfactor is 0,77.

**b** $\frac{85}{429} \times 100\% \approx 19,8\%$

**c** OUD = 28 en NIEUW = 29,5.
$\frac{29,5 - 28}{28} \times 100\% \approx 5,4\%$, dus de procentuele toename is 5,4%.

**d** In havo 4 zitten $0,12 \times 1250 = 150$ leerlingen.

**e** $\frac{12}{31} \times 100\% \approx 38,7\%$ van de leerlingen heeft een scooter.

**f** OUD = 933 en NIEUW = 859.
$\frac{859 - 933}{933} \times 100\% \approx -7,9\%$, dus de procentuele afname is 7,9%.

**Bladzijde 11**

**21** **a** 12% toename, dus delen door 1,12.
De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{550}{1,12} \approx 491$.

**b** 16% afname, dus delen door 0,84.
De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{340}{0,84} \approx 405$.

**22** **a** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{380}{1,07} \approx 355$.

**b** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{185}{0,91} \approx 203$.

**c** Er was eerst $\frac{250}{0,82} \approx 305$.

**23** **a** De oude prijs is $\frac{23}{1,05} \approx$ €21,90.

**b** Vorig jaar zaten er $\frac{230}{0,902} \approx 255$ leerlingen in de brugklas.

**c** Grootten heeft $\frac{3028}{1,038} \approx 2917$ woningen gebouwd in 2019.

**24** **a** De nieuwe prijs is $1,08 \times 25 =$ €27.

**b** De prijs voor de prijsdaling is $\frac{823}{0,86} \approx$ €956,98.

**c** Er zijn $0,14 \times 162 \approx 23$ docenten ouder dan 60 jaar.

**d** OUD = 933 en NIEUW = 859.

$\frac{859 - 933}{933} \times 100\% \approx -7,9\%$, dus de procentuele afname is 7,9%.

**e** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{23}{0,85} \approx 27$.

**Bladzijde 12**

**25** **a** 43% is gelijk aan 750, dus delen door 0,43.

Het totaal is $\frac{750}{0,43} \approx 1744$.

**b** 21,2% is gelijk aan 489, dus delen door 0,212.

Het totaal is $\frac{489}{0,212} \approx 2307$.

**Bladzijde 13**

**26** **a** De totale hoeveelheid is $\frac{715}{0,095} \approx 7526$.

**b** De totale hoeveelheid is $\frac{673}{0,358} \approx 1880$.

**27** **a** Er zijn $\frac{178}{0,782} \approx 228$ vierdeklassers.

**b** De oude huurprijs is $\frac{32,45}{0,039} \approx$ €832,05.

**28** **a** $0{,}057 \times 132 = 7{,}524$

**b** De totale hoeveelheid is $\frac{132}{0{,}057} \approx 2316$.

**c** De oude prijs is $\frac{899}{1{,}075} \approx$ €836,28.

**d** $\frac{87{,}3}{2694{,}8} \times 100\% \approx 3{,}2\%$

**e** De sportschool heeft $\frac{49}{0{,}203} \approx 241$ leden.

**29** **a** $\frac{32}{85} \times 100\% \approx 37{,}6\%$ van de docenten is jonger dan 40 jaar.

**b** OUD = 13,7 en NIEUW = 12,4.

$\frac{12{,}4 - 13{,}7}{13{,}7} \times 100\% \approx -9{,}5\%$, dus de procentuele afname is 9,5%.

**c** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{13{,}7}{1{,}085} \approx 12{,}6$.

**d** $\frac{1\,290\,000}{0{,}538} \approx 2\,398\,000$ Nederlanders kozen afgelopen zomer voor een kampeervakantie in het buitenland.

**e** Dit jaar zitten er $0{,}884 \times 118 \approx 104$ leerlingen op de basisschool.

**f** Vorig jaar waren $\frac{28}{0{,}22} \approx 127$ jongeren lid van de tennisclub.

Dus dit jaar zijn $127 + 28 = 155$ jongeren lid van de tennisclub.

# 2 Algebra deel 1

## 2.1 Herleiden

**Bladzijde 14**

**1**
**a** $p + p + p = 3p$
**b** $x + x + x + x = 4x$
**c** $a + a + a + a + a + a + a = 7a$

**2**
**a** $5a = a + a + a + a + a$
**b** $4b = b + b + b + b$
**c** $7p = p + p + p + p + p + p + p$

**Bladzijde 15**

**3**
**a** $15a \cdot 3b = 45ab$
**b** $25p \cdot -3q = -75pq$
**c** $-7b \cdot 7a = -49ab$
**d** $-2p \cdot -15q = 30pq$
**e** $x \cdot -5 = -5x$
**f** $-k \cdot -l = kl$

**4**
**a** $8x \cdot y \cdot 4z = 32xyz$
**b** $-3b \cdot -a \cdot 3a = 9a^2b$
**c** $-2a \cdot -8b \cdot -5 = -80ab$
**d** $5k \cdot 3l \cdot -m = -15klm$
**e** $18y \cdot 0 \cdot -2x = 0$
**f** $-ac \cdot -8b = 8abc$

**Bladzijde 16**

**5**
**a** $6a + 11a = 17a$
**b** $-22c + 21c = -c$
**c** $-96x + 4x = -92x$
**d** $19y - y = 18y$
**e** $2q - 4q = -2q$
**f** $kl + kl = 2kl$
**g** $-ab + ab = 0$
**h** $x - 3x + 7x = 5x$
**i** $y + 2y + 3y = 6y$
**j** $18z - 2z + z = 17z$

**Bladzijde 17**

**6**
**a** $5b \cdot -5c = -25bc$
**b** $5a + 11a = 16a$
**c** $8y \cdot 0 \cdot 5z = 0$
**d** $-8b \cdot 5b \cdot -5 = 200b^2$
**e** $k + 3k + 5k = 9k$
**f** $-a \cdot -c = ac$

**7**
**a** $3a + 10a = 13a$
**b** $3a + 10b$ *kan niet*
**c** $8b - b = 7b$
**d** $3p + 11$ *kan niet*
**e** $ac - 6ac = -5ac$
**f** $2xy + 8xy = 10xy$
**g** $6p + 6p = 12p$
**h** $6a - 6b$ *kan niet*
**i** $3a - 3a = 0$
**j** $ab + bc$ *kan niet*
**k** $18ab + 6ac$ *kan niet*
**l** $8p - 7p = p$
**m** $4q + 4p$ *kan niet*
**n** $5b - 3a$ *kan niet*

**Bladzijde 18**

**8**
- **a** $5a \cdot 12a = 60a^2$
- **b** $a + 4b$ kan niet
- **c** $5x \cdot 7xy = 35x^2y$
- **d** $3ab + 5bc$ kan niet
- **e** $12ac \cdot 6a = 72a^2c$
- **f** $8p - 8p = 0$
- **g** $q + 4p$ kan niet
- **h** $5 - 3a$ kan niet
- **i** $15a + 12a = 27a$
- **j** $16ab - 16$ kan niet
- **k** $a \cdot 4b = 4ab$
- **l** $7xy + 4x$ kan niet
- **m** $3ab - ab = 2ab$
- **n** $12a \cdot 6a = 72a^2$
- **o** $8p - 3q$ kan niet
- **p** $5pq + 9pq = 14pq$

**9**
- **a** $17a = 7a + 10a$
- **b** $-24ac = 12a \cdot -2c$
- **c** $45x = 5x + 40x$
- **d** $20p = 55p - 35p$
- **e** $25xy = x \cdot 25y$
- **f** $14klm = 7klm + 7klm$
- **g** $27ab = 9a \cdot 3b$
- **h** $4xy = 16xy - 12xy$

## 2.2 Haakjes wegwerken

**Bladzijde 19**

**10**
- **a** $5(a + c) = 5a + 5c$
- **b** $8(2a + b) = 16a + 8b$
- **c** $a(3b + c) = 3ab + ac$
- **d** $x(2y + 3) = 2xy + 3x$
- **e** $5a(2b + c) = 10ab + 5ac$
- **f** $3p(x + 3) = 3px + 9p$
- **g** $4a(b + \frac{1}{2}) = 4ab + 2a$
- **h** $3c(a + 1) = 3ac + 3c$

**Bladzijde 20**

**11**
- **a** $-4(x + 2y) = -4x - 8y$
- **b** $4(x - 2y) = 4x - 8y$
- **c** $-4(x - 3) = -4x + 12$
- **d** $-4(2x + 8) = -8x - 32$
- **e** $-3a(2b + c) = -6ab - 3ac$
- **f** $5a(3b - c) = 15ab - 5ac$
- **g** $-2p(3q - 1) = -6pq + 2p$
- **h** $5q(2p + 8) = 10pq + 40q$

**Bladzijde 21**

**12**
- **a** $3(a + 2b) - 6a = 3a + 6b - 6a = -3a + 6b$
- **b** $-5(a - 2b) + 6a = -5a + 10b + 6a = a + 10b$
- **c** $5(a - 2b) + 3(2a - b) = 5a - 10b + 6a - 3b = 11a - 13b$
- **d** $8(a - b) - 5(a - 3) = 8a - 8b - 5a + 15 = 3a - 8b + 15$
- **e** $2a - (5 + 2a) = 2a - 5 - 2a = -5$
- **f** $-3(a - 1) - 3a = -3a + 3 - 3a = -6a + 3$

**13**
- **a** $3a - 2(a + 6) = 3a - 2a - 12 = a - 12$
- **b** $5a(c + 2) = 5ac + 10a$
- **c** $3 + a - 2(a + 6) = 3 + a - 2a - 12 = -a - 9$
- **d** $8p(2r + s) = 16pr + 8ps$
- **e** $3(a - 1) - (a - 8) = 3a - 3 - a + 8 = 2a + 5$
- **f** $-(2x - 3) = -2x + 3$

**g** $4(a-1)-2a+8=4a-4-2a+8=2a+4$
**h** $-4(x-2y)-x(y-3)=-4x+8y-xy+3x=-x+8y-xy$
**i** $-b(2-a)+b-ab=-2b+ab+b-ab=-b$
**j** $-5(-3p+q)=15p-5q$

**Bladzijde 22**

**14** **a** $(p+5)(q+4)=pq+4p+5q+20$
**b** $(x+12)(y+2)=xy+2x+12y+24$
**c** $(a+3)(a+8)=a^2+8a+3a+24=a^2+11a+24$
**d** $(b+15)(b+3)=b^2+3b+15b+45=b^2+18b+45$
**f** $(x+4)(x+3)=x^2+3x+4x+12=x^2+7x+12$
**g** $(a+2)(a+30)=a^2+30a+2a+60=a^2+32a+60$

**15** **a** $5(a+5)-6=5a+25-6=5a+19$
**b** $(x+5)(x-2)=x^2-2x+5x-10=x^2+3x-10$
**c** $-6(4a+8)+3=-24a-48+3=-24a-45$
**d** $(y+4)(y-7)=y^2-7y+4y-28=y^2-3y-28$
**e** $3x-2y+x(y-5)=3x-2y+xy-5x=-2x-2y+xy$
**f** $3(a+7)-9=3a+21-9=3a+12$
**g** $(x+3)(x-1)=x^2-x+3x-3=x^2+2x-3$
**h** $-2(3a+8)-3a=-6a-16-3a=-9a-16$

## 2.3 Letterrekenen met breuken

**Bladzijde 23**

**16** **a** $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$
**b** $\frac{4}{10}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$
**c** $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
**d** $\frac{2}{15}-\frac{7}{15}=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}$
**e** $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
**f** $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

**Bladzijde 24**

**17** **a** $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{12}{28}+\frac{7}{28}=\frac{19}{28}$
**b** $\frac{2}{5}-\frac{7}{10}=\frac{4}{10}-\frac{7}{10}=-\frac{3}{10}$
**c** $\frac{5}{8}-\frac{2}{3}=\frac{15}{24}-\frac{16}{24}=-\frac{1}{24}$
**d** $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{9}{15}+\frac{5}{15}=\frac{14}{15}$

**18** **a** $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$
**b** $\frac{3}{10}-\frac{7}{10}=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$
**c** $\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$
**d** $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}=1$

**Bladzijde 25**

**19** **a** $\frac{3b}{3d} = \frac{b}{d}$

**b** $\frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$

**c** $\frac{pq}{pr} = \frac{q}{r}$

**d** $\frac{5xy}{25xz} = \frac{y}{5z}$

**20** **a** $\frac{15a}{3} + 5a = 5a + 5a = 10a$

**b** $\frac{6xy}{3y} - x = 2x - x = x$

**c** $-\frac{ab}{b} - 2a = -a - 2a = -3a$

**d** $\frac{15ac}{3c} - \frac{50ab}{5b} = 5a - 10a = -5a$

**21** **a** $\frac{-16x}{4} + 4x = -4x + 4x = 0$

**b** $\frac{28ab}{7ab} - 1 = 4 - 1 = 3$

**c** $\frac{36pq}{12q} + 2p = 3p + 2p = 5p$

**d** $\frac{-21a}{7a} - \frac{12p}{3p} = -3 - 4 = -7$

**Bladzijde 26**

**22** **a** $\frac{8}{3p} + \frac{7}{3p} = \frac{15}{3p} = \frac{5}{p}$

**b** $\frac{5}{2x} - \frac{7}{2x} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x}$

**c** $\frac{2}{p} + \frac{4}{q} = \frac{2q}{pq} + \frac{4p}{pq} = \frac{2q + 4p}{pq}$

**d** $\frac{6}{k} - \frac{5}{m} = \frac{6m}{km} - \frac{5k}{km} = \frac{6m - 5k}{km}$

**e** $\frac{13}{2y} - \frac{3}{2y} = \frac{10}{2y} = \frac{5}{y}$

**f** $6 - \frac{1}{p} = \frac{6}{1} - \frac{1}{p} = \frac{6p}{p} - \frac{1}{p} = \frac{6p - 1}{p}$

**Bladzijde 27**

**23** **a** $\frac{p}{4p} + \frac{1}{p} = \frac{p}{4p} + \frac{4}{4p} = \frac{p + 4}{4p}$

**b** $\frac{18ac}{6c} + 2a = 3a + 2a = 5a$

**c** $\frac{11}{a} - \frac{5}{2b} = \frac{22b}{2ab} - \frac{5a}{2ab} = \frac{22b - 5a}{2ab}$

**d** $\frac{3}{p} + \frac{1}{4} = \frac{12}{4p} + \frac{p}{4p} = \frac{12 + p}{4p}$

**e** $\frac{3x}{x} + 8 = 3 + 8 = 11$

**f** $\frac{24q}{8q} - \frac{28q}{7q} = 3 - 4 = -1$

**24** **a** $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

**b** $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

**c** $-5 \cdot \frac{2}{7} = -\frac{5}{1} \cdot \frac{2}{7} = -\frac{10}{7} = -1\frac{3}{7}$

**d** $\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5} : \frac{4}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

**e** $-\frac{1}{3} : \frac{5}{6} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

**f** $\frac{1}{8} : 12 = \frac{1}{8} : \frac{12}{1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{96}$

**Bladzijde 28**

**25** **a** $\frac{x}{12} \cdot \frac{9}{y} = \frac{9x}{12y} = \frac{3x}{4y}$

**b** $\frac{a}{4} : \frac{3}{c} = \frac{a}{4} \cdot \frac{c}{3} = \frac{ac}{12}$

**c** $\frac{p}{9} \cdot r = \frac{p}{9} \cdot \frac{r}{1} = \frac{pr}{9}$

**d** $\frac{a}{5} : \frac{8b}{c} = \frac{a}{5} \cdot \frac{c}{8b} = \frac{ac}{40b}$

**26** **a** $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3y}{xy}+\frac{2x}{xy}=\frac{3y+2x}{xy}$

**b** $\frac{2p}{pq}+\frac{7}{q}=\frac{2}{q}+\frac{7}{q}=\frac{9}{q}$

**c** $\frac{3}{p}\cdot\frac{6}{q}=\frac{18}{pq}$

**d** $\frac{6}{r}:\frac{p}{9}=\frac{6}{r}\cdot\frac{9}{p}=\frac{54}{pr}$

**e** $\frac{4}{ab}-\frac{8}{ab}=-\frac{4}{ab}$

**f** $\frac{1}{6}:a=\frac{1}{6}:\frac{a}{1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{6a}$

**g** $\frac{5a}{10a}+\frac{4a}{2a}=\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}$

**h** $5-\frac{3}{a}=\frac{5}{1}-\frac{3}{a}=\frac{5a}{a}-\frac{3}{a}=\frac{5a-3}{a}$

**i** $\frac{9xy}{3y}-x=3x-x=2x$

**j** $\frac{10}{b}-\frac{4}{9a}=\frac{90a}{9ab}-\frac{4b}{9ab}=\frac{90a-4b}{9ab}$

## 2.4 Machten

**Bladzijde 29**

**27** **a** $2b^3\cdot 2b^2=4b^5$

**b** $3k^2\cdot -9k^5=-27k^7$

**c** $5x^{10}\cdot -y^{10}=-5x^{10}y^{10}$

**d** $-3y\cdot -y^{13}=3y^{14}$

**e** $11a^4\cdot -2b^5=-22a^4b^5$

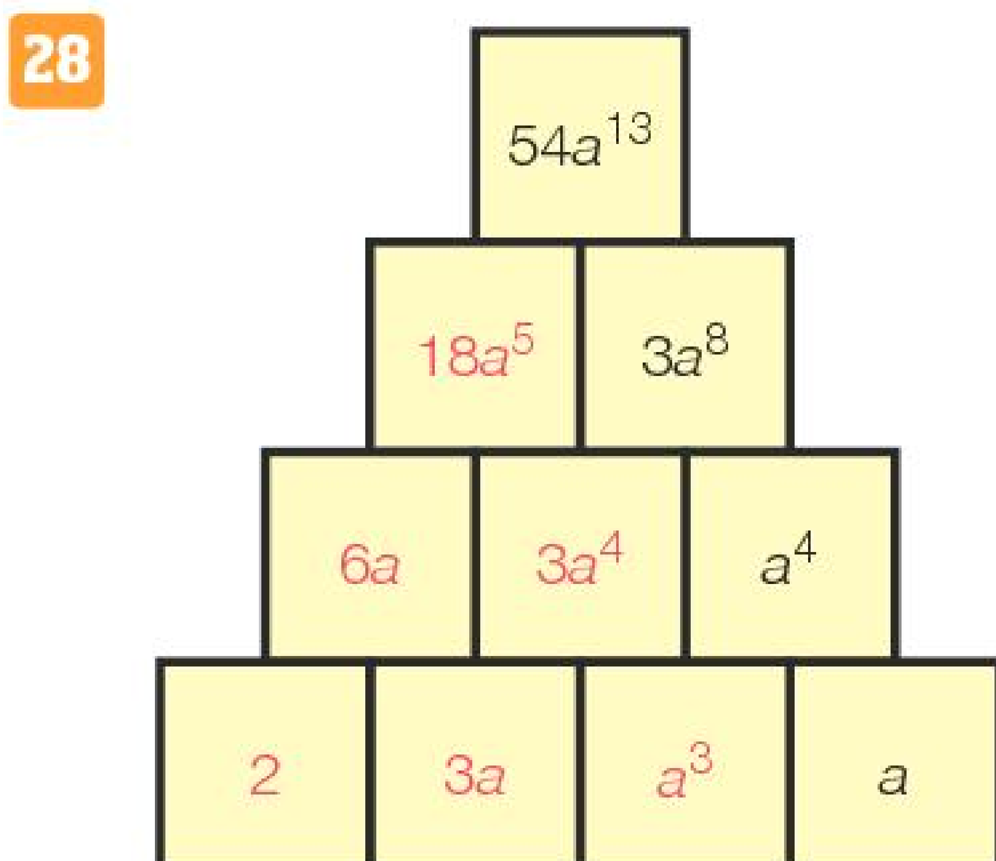
**f** $4x^3\cdot 2x^7\cdot -2x^2=-16x^{12}$

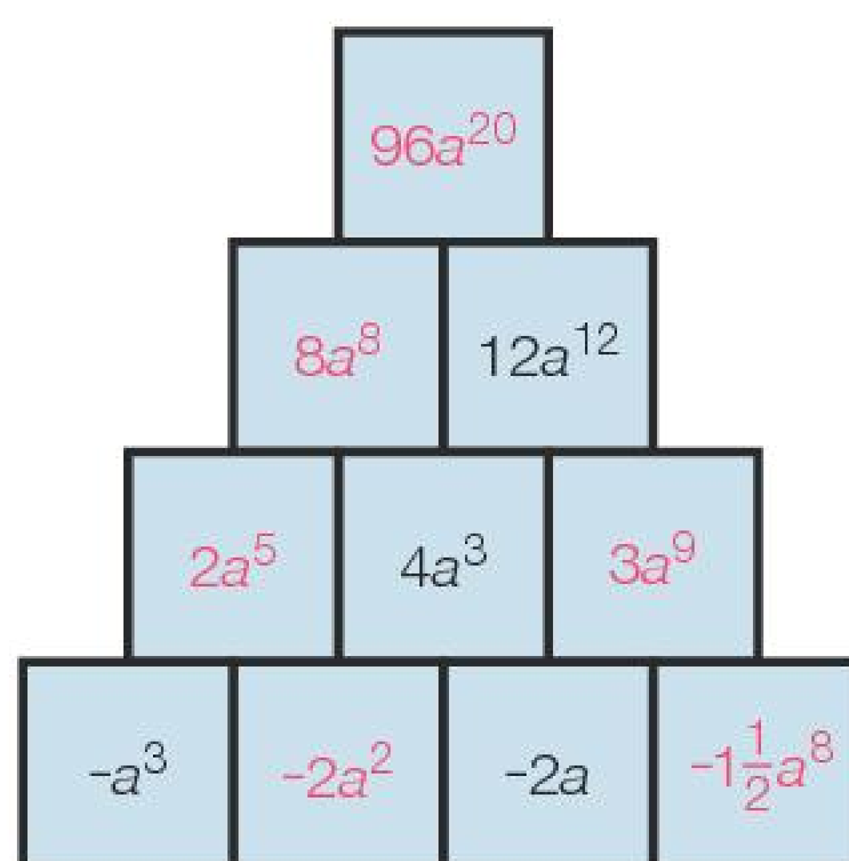
**g** $-3a^3\cdot -a^6\cdot 2a=6a^{10}$

**h** $-x\cdot -12x^4\cdot x^2=12x^7$

**Bladzijde 30**

**28**




**29** **a** $5x^2+9x^2=14x^2$

**b** $-5a^4+5a^4=0$

**c** $3x^3y-x^3y^2$ *kan niet*

**d** $xy^3+3xy^3=4xy^3$

**e** $-a^4b^2-a^4b^2=-2a^4b^2$

**f** $-4y^2+3y^2=-y^2$

**Bladzijde 31**

**30** **a** $13x^4y^3+x^4y^3=14x^4y^3$

**b** $-b^5+b^5=0$

**c** $6ab^2+5a^4b$ *kan niet*

**d** $3b^5\cdot 4b^7=12b^{12}$

**e** $4x^3y^2\cdot -6x^4y^9=-24x^7y^{11}$

**f** $6a^6b-8a^6b=-2a^6b$

**31** **a** $(x^3)^5 = x^{15}$
**b** $(b^7)^2 = b^{14}$
**c** $6x^2 \cdot (x^2)^4 = 6x^2 \cdot x^8 = 6x^{10}$
**d** $(a^2)^4 + (a^4)^2 = a^8 + a^8 = 2a^8$
**e** $3a^{10} - 4(a^5)^2 = 3a^{10} - 4a^{10} = -a^{10}$
**f** $11(y^6)^5 - 11(y^{15})^2 = 11y^{30} - 11y^{30} = 0$

**Bladzijde 32**

**32** **a** $6x^4y^6 - x^4y^6 = 5x^4y^6$
**b** $3a^{10} - 4(a^5)^2 = 3a^{10} - 4a^{10} = -a^{10}$
**c** $x^5 \cdot -2x^9 = -2x^{14}$
**d** $a^2b^3 + 2a^3b^2$ *kan niet*
**e** $-a^3b^5 \cdot -a^6 = a^9b^5$
**f** $4x^4y^8 - 9x^4y^8 = -5x^4y^8$
**g** $-3a^3 \cdot 4ab^5 = -12a^4b^5$
**h** $2x^4 - 4(x^2)^2 = 2x^4 - 4x^4 = -2x^4$

**33** **a** $(xy)^6 = x^6y^6$
**b** $(7x)^2 = 49x^2$
**c** $(-a)^7 = -a^7$
**d** $-(3b)^2 = -9b^2$
**e** $-4(x^2y)^3 = -4x^6y^3$
**f** $(xyz)^5 = x^5y^5z^5$

**Bladzijde 33**

**34** **a** $(-2x^2)^3 = -8x^6$
**b** $(xyz^2)^5 = x^5y^5z^{10}$
**c** $(-2a^2b^2c)^4 = 16a^8b^8c^4$
**d** $(5x^3)^2 + 5(x^2)^3 = 25x^6 + 5x^6 = 30x^6$
**e** $4(ab)^4 \cdot a^3b^5 = 4a^4b^4 \cdot a^3b^5 = 4a^7b^9$
**f** $(-2q^4)^3 - (q^6)^2 = -8q^{12} - q^{12} = -9q^{12}$

**Bladzijde 34**

**35** **a** $\frac{a^8}{a^3} = a^5$
**b** $\frac{y^9}{y} = y^8$
**c** $\frac{11b^5}{11b^5} = 1$
**d** $\frac{12x^{10}}{4x^5} = 3x^5$

**36** **a** $\frac{a^{13}}{a^{10}} = a^3$
**b** $a^{10} + a^{13}$ *kan niet*
**c** $(10a)^3 = 1000a^3$
**d** $10a + 13a = 23a$
**e** $a^{10} \cdot a^{13} = a^{23}$
**f** $\frac{10a}{13a} = \frac{10}{13}$
**g** $a^{13} - a^{10}$ *kan niet*
**h** $\frac{16a^8}{4a^6} = 4a^2$
**i** $a^9 \cdot (a^5)^2 = a^9 \cdot a^{10} = a^{19}$
**j** $a^9 + 4(a^3)^2 = a^9 + 4a^6$
**k** $5a^6 - 3(a^3)^2 = 5a^6 - 3a^6 = 2a^6$
**l** $11a^7 - 7a^7 = 4a^7$
**m** $3p^7 \cdot -8p^4 = -24p^{11}$
**n** $\frac{p^{12}}{(p^2)^6} = \frac{p^{12}}{p^{12}} = 1$
**o** $-8y^3 \cdot 5y^2 = -40y^5$
**p** $12a^6 - 4a^2 \cdot 2a^4 = 12a^6 - 8a^6 = 4a^6$

# 3 Lineaire vergelijkingen en formules

## 3.1 Lineaire vergelijkingen

**Bladzijde 36**

**1** **a** $5x - 7 = 12x - 7$
$5x - 12x = -7 + 7$
$-7x = 0$
$x = 0$

**b** $3a - 2 = a + 4$
$3a - a = 4 + 2$
$2a = 6$
$a = 3$

**c** $-5b - 10 = -6b + 3$
$-5b + 6b = 3 + 10$
$b = 13$

**d** $x - 5 = 4x + 1$
$x - 4x = 1 + 5$
$-3x = 6$
$x = -2$

**2** **a** $5(x - 3) = 2x + 9$
$5x - 15 = 2x + 9$
$5x - 2x = 9 + 15$
$3x = 24$
$x = 8$

**b** $5a + 7 = 3(a + 8)$
$5a + 7 = 3a + 24$
$5a - 3a = 24 - 7$
$2a = 17$
$a = 8\frac{1}{2}$

**c** $3(x - 1) = -x + 12$
$3x - 3 = -x + 12$
$3x + x = 12 + 3$
$4x = 15$
$x = 3\frac{3}{4}$

**d** $2y - 8 = 3 + 3(y - 7)$
$2y - 8 = 3 + 3y - 21$
$2y - 3y = 3 - 21 + 8$
$-y = -10$
$y = 10$

**e** $4(x - 4) = 5(x - 5)$
$4x - 16 = 5x - 25$
$4x - 5x = -25 + 16$
$-x = -9$
$x = 9$

**f** $3(y + 5) = -2(y + 10)$
$3y + 15 = -2y - 20$
$3y + 2y = -20 - 15$
$5y = -35$
$y = -7$

**3** **a** $9x = x - 16$
$9x - x = -16$
$8x = -16$
$x = -2$

**b** $4(3x - 2) + 12 = 28$
$12x - 8 + 12 = 28$
$12x = 28 + 8 - 12$
$12x = 24$
$x = 2$

**c** $2(p-2)=3(p+5)$
$2p-4=3p+15$
$2p-3p=15+4$
$-p=19$
$p=-19$

**d** $-y-1=-2y$
$-y+2y=1$
$y=1$

**e** $5(3y-7)+7=7(2y-4)$
$15y-35+7=14y-28$
$15y-14y=-28+35-7$
$y=0$

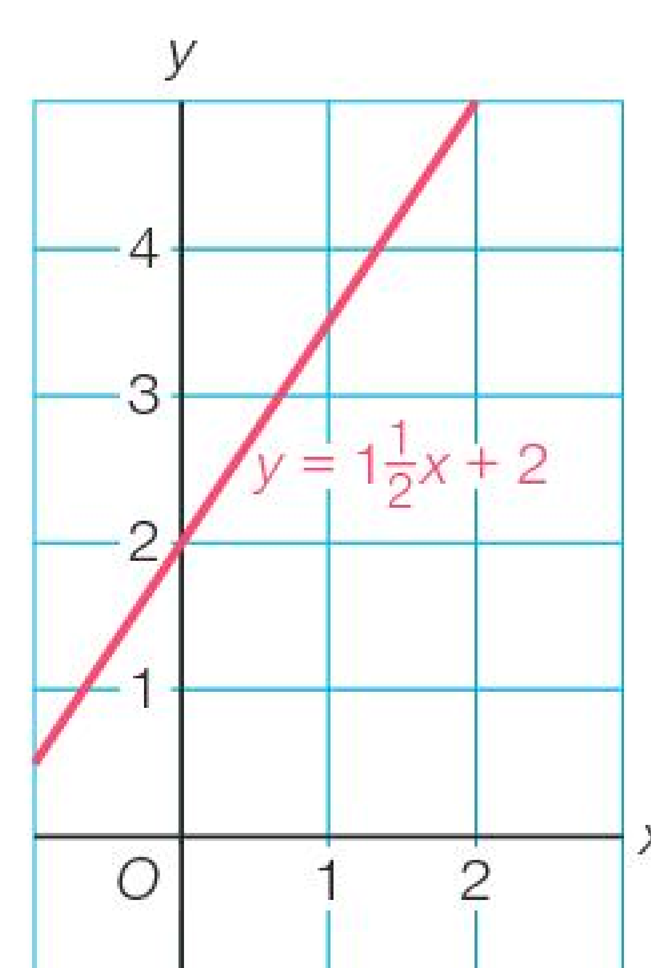
**f** $5a-10=3a-2$
$5a-3a=-2+10$
$2a=8$
$a=4$

## 3.2 Lineaire formules

**Bladzijde 37**

**4** **a**

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 2 | 5 |

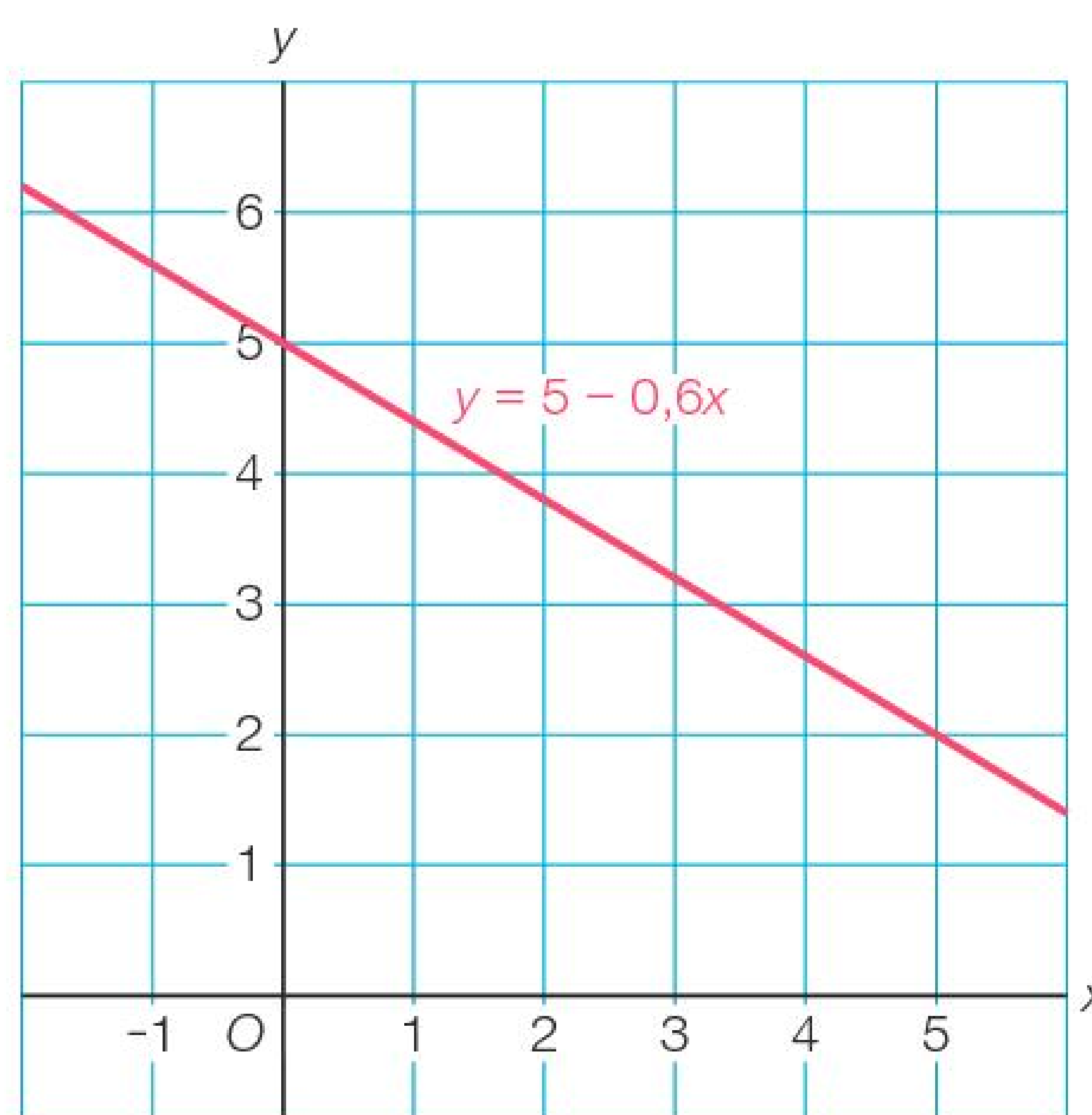



**b** $x=5$ geeft $y=1\frac{1}{2}\cdot 5+2=9\frac{1}{2}$
Dus $A$ ligt op de grafiek.
$x=-5$ geeft $y=1\frac{1}{2}\cdot -5+2=-5\frac{1}{2}$
Dus $B$ ligt niet op de grafiek.
$x=14$ geeft $y=1\frac{1}{2}\cdot 14+2=23$
Dus $C$ ligt op de grafiek.

**Bladzijde 38**

**5** **a**

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $y$ | 5 | 2 |




**b** $x=7$ geeft $y=5-0{,}6\cdot 7=0{,}8$
Dus $P$ ligt niet op de grafiek.
$x=-5$ geeft $y=5-0{,}6\cdot -5=8$
Dus $Q$ ligt op de grafiek.
$x=20$ geeft $y=5-0{,}6\cdot 20=-7$
Dus $R$ ligt niet op de grafiek.

**6** **a** $y = 1\frac{1}{2}x$

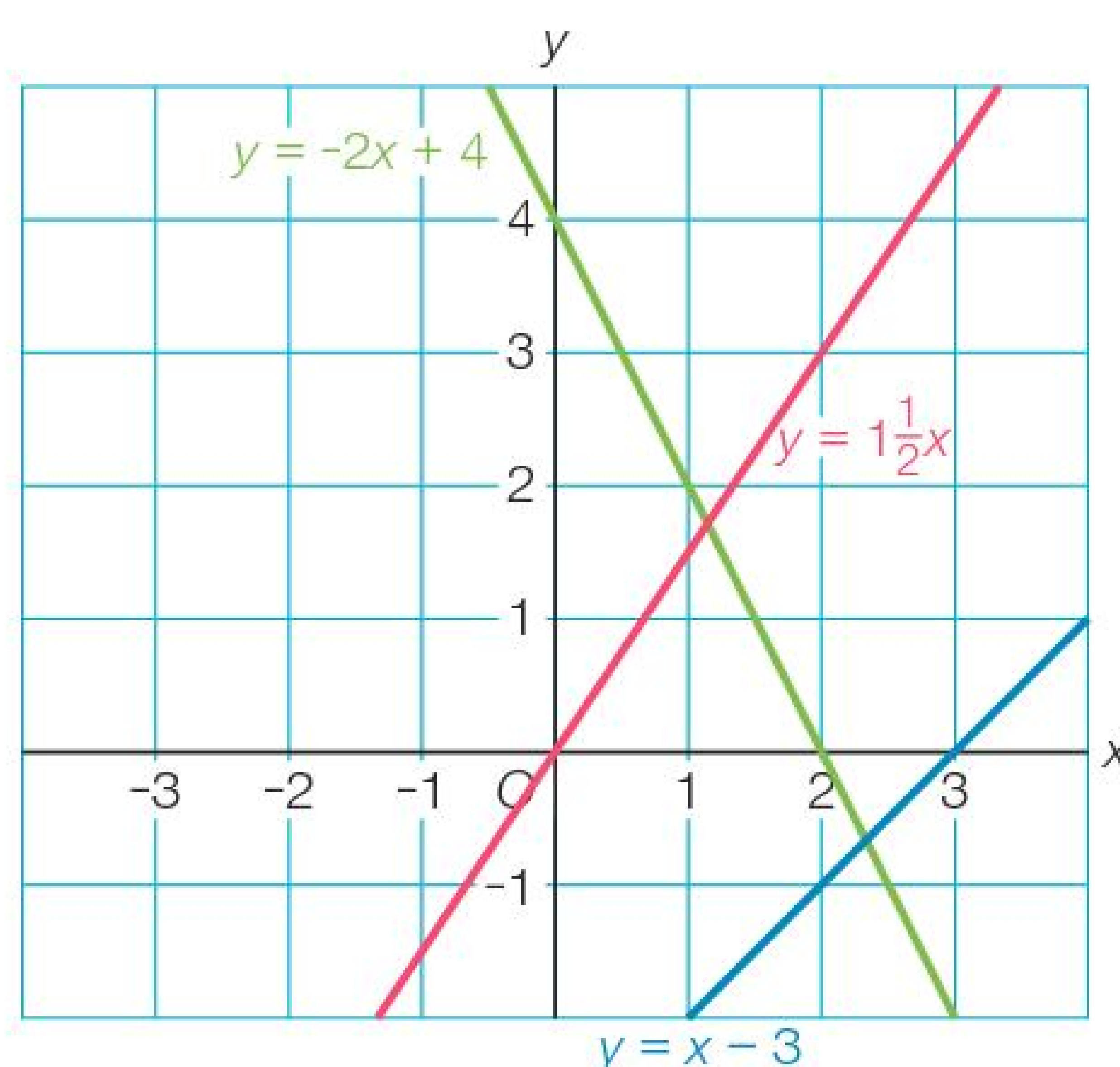
| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 |

$y = x - 3$

| $x$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 |

$y = -2x + 4$

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 4 | 0 |




**b** $x = -8$ invullen in $y = 1\frac{1}{2}x$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot -8 = -12$.
Dus $P$ ligt op de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x$.
$x = -8$ invullen in $y = x - 3$ geeft $y = -8 - 3 = -11$.
Dus $P$ ligt niet op de grafiek van $y = x - 3$.
In de figuur zie je dat $P$ niet op de grafiek van $y = -2x + 4$ ligt.

**Bladzijde 39**

**7** **a** Van $y = 2x + 3$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 3$ snijden de grafieken de $y$-as in hetzelfde punt. Dat zie je aan het getal 3.

**b** Van $y = 1\frac{1}{2}x + 4$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 3$ zijn de grafieken evenwijdig.
Ze hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, namelijk $1\frac{1}{2}$.

**8** **a** De grafieken van I en III zijn evenwijdig en de grafieken van IV en V zijn evenwijdig.

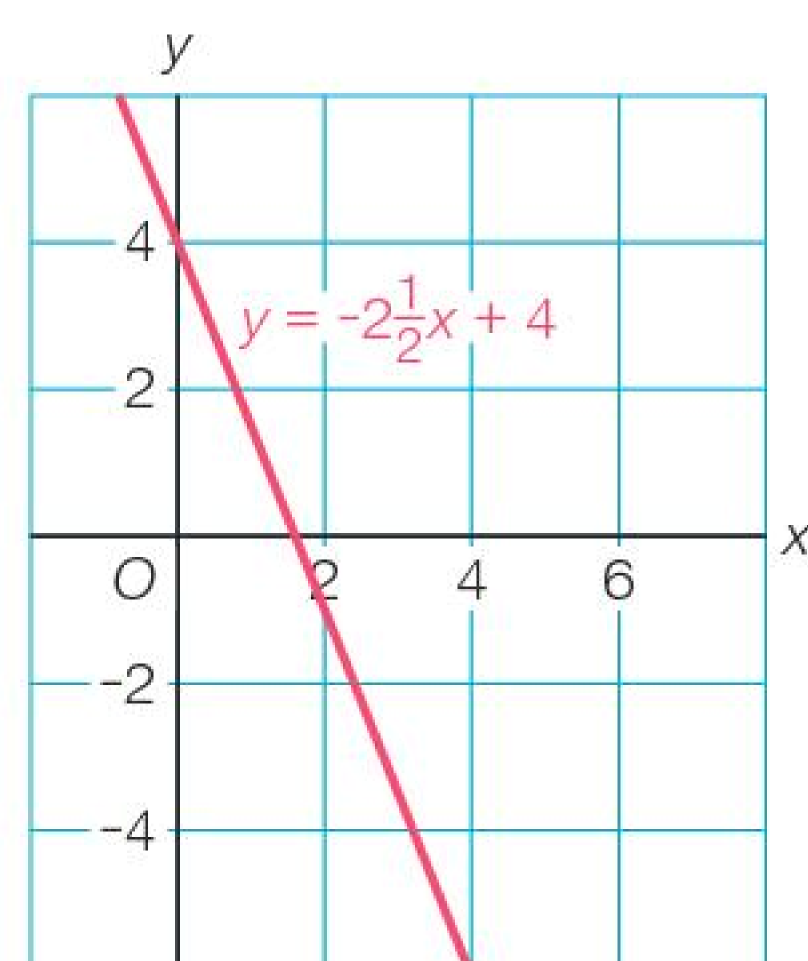
**b** De grafieken van I en VI hebben hetzelfde snijpunt met de $y$-as en de grafieken van II, III en V hebben hetzelfde snijpunt met de $y$-as.

**9** **a** De grafiek snijdt de $y$-as in het punt (0, 4).

**b** rc = $-2\frac{1}{2}$

**c**

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 4 | −1 |




**10** **a** De grafieken van I en III zijn evenwijdig en de grafieken van II en IV zijn evenwijdig.

**b** De grafieken van I en IV hebben hetzelfde snijpunt met de $y$-as en de grafieken van III, V en VI hebben hetzelfde snijpunt met de $y$-as.

**c** $y = 3x - 6$

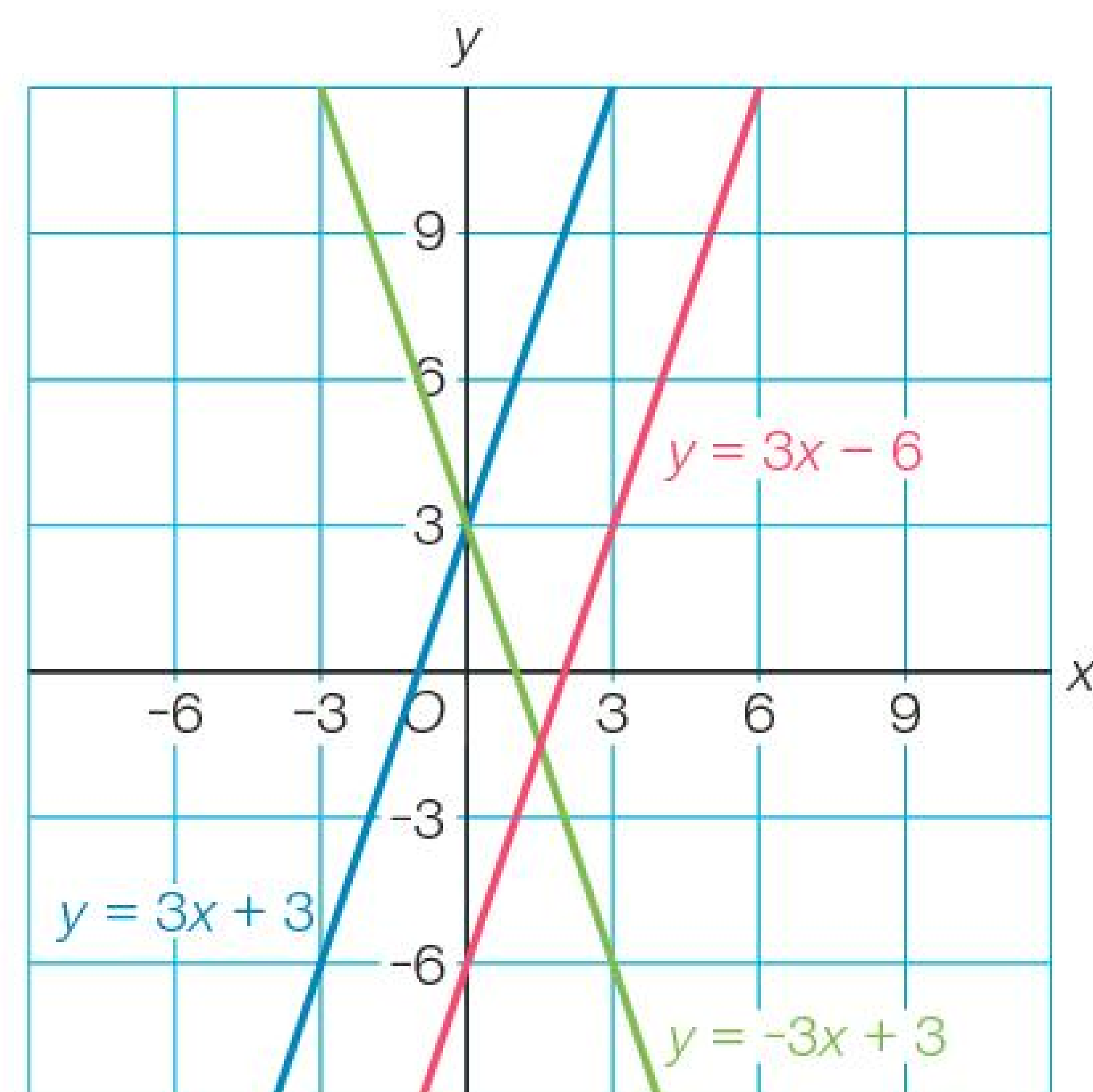
| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | −6 | 3 |

$y = 3x + 3$

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 12 |

$y = -3x + 3$

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | −6 |



## 3.3 Formules opstellen en vergelijken

**Bladzijde 41**

**11** **a** $p$: $y = ax + b$

Door (0, 2) en (2, 3), dus $a = \frac{1}{2}$.

$b = 2$

Dus $p$: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

**b** $q$: $y = ax + b$

Door (1, 3) en (3, 0), dus $a = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

$b = 4\frac{1}{2}$

Dus $q$: $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.

**12** $l$: $A = at + b$

Door (0, 1) en (2, 2), dus $a = \frac{1}{2}$.

$b = 1$

Dus $l$: $A = \frac{1}{2}t + 1$.

**13** **a** $h$: $B = aq + b$

Door (0, 16) en (6, 0), dus $a = \frac{-16}{6} = -2\frac{2}{3}$.

$b = 16$

Dus $h$: $B = -2\frac{2}{3}q + 16$.

**b** $g$: $R = ap + b$

Door (0, 0) en (6, 180), dus $a = \frac{180}{6} = 30$.

$b = 0$

Dus $g$: $R = 30p$.

**Bladzijde 42**

**14** $4x + 3 = 3x - 1$

$4x - 3x = -1 - 3$

$x = -4$

$x = -4$ invullen in $y = 4x + 3$ geeft $y = 4 \cdot -4 + 3 = -13$.

Dus $S(-4, -13)$.

**15** $-3x + 3 = x - 9$

$-3x - x = -9 - 3$

$-4x = -12$

$x = 3$

$x = 3$ invullen in $y = x - 9$ geeft $y = 3 - 9 = -6$.

Dus $T(3, -6)$.

**16** $5x - 1 = x - 17$
$5x - x = -17 + 1$
$4x = -16$
$x = -4$
$x = -4$ invullen in $y = 5x - 1$ geeft $y = 5 \cdot -4 - 1 = -21$.
Dus $S(-4, -21)$.

**17** $-4x + 8 = -x - 7$
$-4x + x = -7 - 8$
$-3x = -15$
$x = 5$
$x = 5$ invullen in $y = -x - 7$ geeft $y = -5 - 7 = -12$.
Dus $T(5, -12)$.

**18** $x = -\frac{1}{2}x - 6$
$x + \frac{1}{2}x = -6$
$1\frac{1}{2}x = -6$
$x = -4$
$x = -4$ invullen in $y = x$ geeft $y = -4$.
Dus $P(-4, -4)$.

**19** $k$: $y = ax + b$
Door (0, 2) en (1, 3), dus $a = 1$.
$b = 2$
Dus $k$: $y = x + 2$.

$n$: $y = ax + b$
Door (0, 5) en (1, 4), dus $a = -1$.
$b = 5$
Dus $n$: $y = -x + 5$.

$x + 2 = -x + 5$
$x + x = 5 - 2$
$2x = 3$
$x = 1\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{2}$ invullen in $y = x + 2$ geeft $y = 1\frac{1}{2} + 2 = 3\frac{1}{2}$.
Dus $S(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

# 4 [HAVO-B/MBO] Lineaire functies

**Bladzijde 43**

**1** **a** $5 \times 6{,}50 + 12{,}50 = €45$ **b** $8 \times 6{,}50 + 12{,}50 = €64{,}50$

**2** **a** $8 \times 7{,}50 + 13{,}50 = €73{,}50$ **b** $12 \times 7{,}50 + 13{,}50 = €103{,}50$

**Bladzijde 44**

**3** **a** $f(2) = -5 \cdot 2 - 10 = -20$
$f(-4) = -5 \cdot -4 - 10 = 10$
$f(10) = -5 \cdot 10 - 10 = -60$
**b** $g(-6) = -2 \cdot -6 + 12 = 24$
$g(-1) = -2 \cdot -1 + 12 = 14$
$g(100) = -2 \cdot 100 + 12 = -188$
**c** $f(4) + g(4) = -5 \cdot 4 - 10 + -2 \cdot 4 + 12 = -20 - 10 - 8 + 12 = -26$
**d** $h(x) = -5x - 10 + -2x + 12 = -7x + 2$

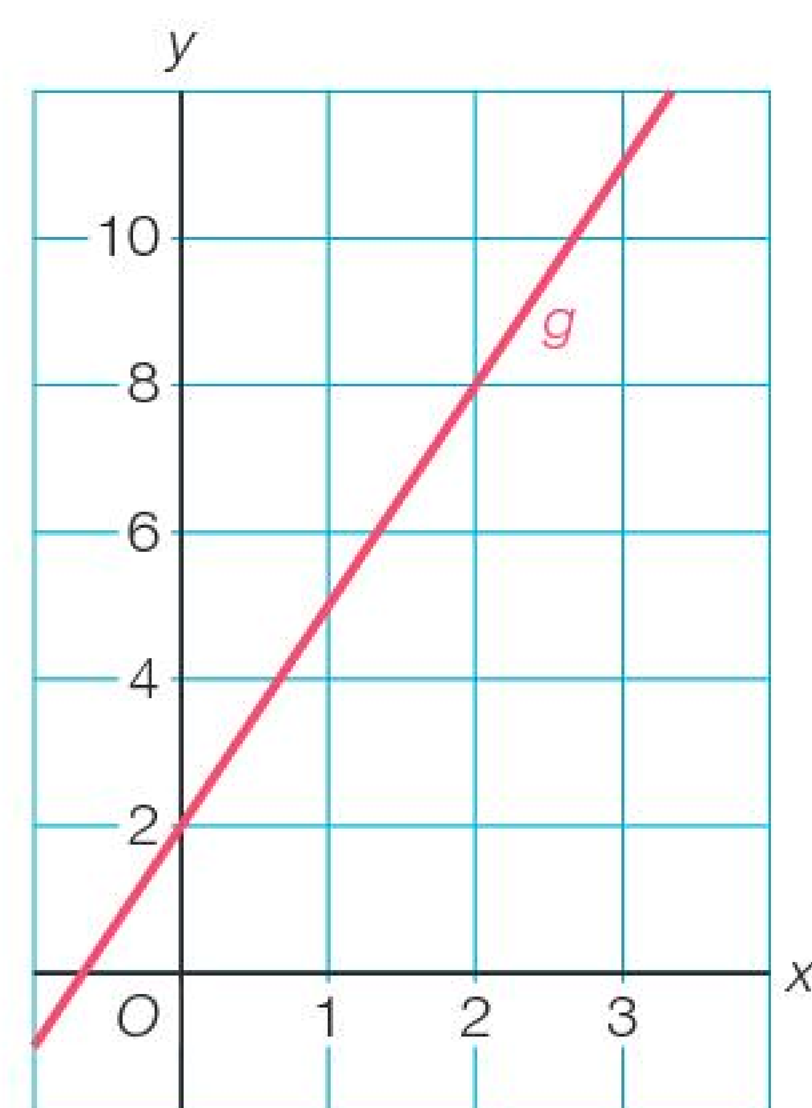
**4** **a** $f(2) = -10 \cdot 2 = -20$
$f(-5) = -10 \cdot -5 = 50$
$f(12) = -10 \cdot 12 = -120$
**b** $g(6) = 10 - 3 \cdot 6 = -8$
$g(-4) = 10 - 3 \cdot -4 = 22$
$g(15) = 10 - 3 \cdot 15 = -35$
**c** $g(-15) = 10 - 3 \cdot -15 = 55$
**d** $h(x) = -10x + 10 - 3x = -13x + 10$

**Bladzijde 45**

**5** **a** $g(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$
$g(6) = 3 \cdot 6 + 2 = 20$
**b**

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 2 | 8 |

Zie de grafiek hiernaast.




**c** $g(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
Dus $Q$ ligt op de grafiek van $g$.
**d** $3x + 2 = 29$
$3x = 29 - 2$
$3x = 27$
$x = 9$
Dus $x_R = 9$.

**Bladzijde 46**

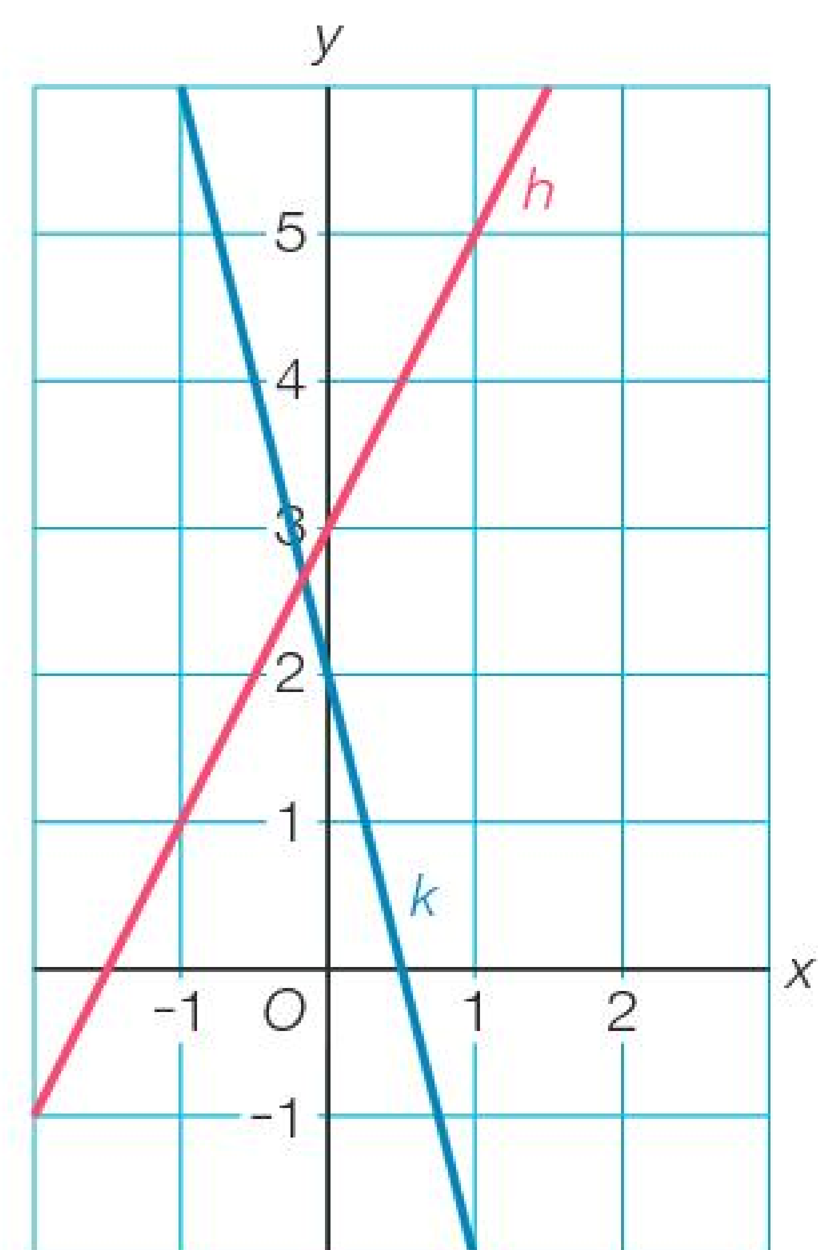
**6** **a** $h(x) = 2x + 3$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $h(x)$ | 3 | 5 |

$k(x) = -4x + 2$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $k(x)$ | 2 | -2 |

Zie de grafieken hiernaast.




**b** $h(-1\frac{1}{2}) = 2 \cdot -1\frac{1}{2} + 3 = 0$

**c** $k(\frac{1}{2}) = -4 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$

**d** $g(x) = 2x + 3 + -4x + 2 = -2x + 5$

**Bladzijde 47**

**7** $f(x) = 0$ geeft $-2x + 8 = 0$

$-2x = -8$

$x = 4$

Dus $P(4, 0)$.

$f(0) = 8$, dus $Q(0, 8)$.

**8** $g(x) = 0$ geeft $-4x - 4 = 0$

$-4x = 4$

$x = -1$

Dus $S(-1, 0)$.

$g(0) = -4$, dus $T(0, -4)$.

**9** **a** $f(x) = 0$ geeft $0{,}4x + 4 = 0$

$0{,}4x = -4$

$x = -10$

Dus $K(-10, 0)$.

$f(0) = 4$, dus $M(0, 4)$.

$g(x) = 0$ geeft $-1{,}6x + 5 = 0$

$-1{,}6x = -5$

$x = 3{,}125$

Dus $L(3{,}125; 0)$

$g(0) = 5$, dus $N(0, 5)$.

**b** $0{,}4x + 4 = -1{,}6x + 5$

$0{,}4x + 1{,}6x = 5 - 4$

$2x = 1$

$x = 0{,}5$

$f(0{,}5) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 4 = 0{,}2 + 4 = 4{,}2$

Dus $S(0{,}5; 4{,}2)$

**c** $h(x) = 0{,}4x + 4 + -1{,}6x + 5 = -1{,}2x + 9$

# 5 [HAVO-B] Lineaire vormen

## 5.1 Formules opstellen

**Bladzijde 48**

**1** $\left.\begin{array}{l} l\colon y = 3x + b \\ A(-3, 5) \text{ op } l \end{array}\right\} 3 \cdot -3 + b = 5$

$-9 + b = 5$

$b = 14$

Dus $l\colon y = 3x + 14$.

**2** $\left.\begin{array}{l} m\colon y = -\frac{1}{2}x + b \\ B(-4, 8) \text{ op } m \end{array}\right\} -\frac{1}{2} \cdot -4 + b = 8$

$2 + b = 8$

$b = 6$

Dus $m\colon y = -\frac{1}{2}x + 6$.

**3** $\left.\begin{array}{l} p\colon y = -5x + b \\ Q(1, 3) \text{ op } p \end{array}\right\} -5 \cdot 1 + b = 3$

$-5 + b = 3$

$b = 8$

Dus $p\colon y = -5x + 8$.

**Bladzijde 49**

**4** $k\colon y = ax + b$ is evenwijdig met $l$, dus $a = 4$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 4x + b \\ P(-3, 5) \text{ op } k \end{array}\right\} 4 \cdot -3 + b = 5$

$-12 + b = 5$

$b = 17$

Dus $k\colon y = 4x + 17$.

**5** $q\colon y = ax + b$ is evenwijdig met $r$, dus $a = -1\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} q\colon y = -1\frac{1}{2}x + b \\ S(6, -5) \text{ op } q \end{array}\right\} -1\frac{1}{2} \cdot 6 + b = -5$

$-9 + b = -5$

$b = 4$

Dus $q\colon y = -1\frac{1}{2}x + 4$.

**6** $l$: $y = ax + b$ is evenwijdig met $m$, dus $a = 5$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = 5x + b \\ B(6, 13) \text{ op } l \end{array}\right\} 5 \cdot 6 + b = 13$

$30 + b = 13$

$b = -17$

Dus $l$: $y = 5x - 17$.

**7** $p$: $y = ax + b$ is evenwijdig met $q$, dus $a = -3$.

$\left.\begin{array}{l} p\text{: } y = -3x + b \\ Q(-4, 7) \text{ op } p \end{array}\right\} -3 \cdot -4 + b = 7$

$12 + b = 7$

$b = -5$

Dus $p$: $y = -3x - 5$.

**Bladzijde 50**

**8**

**a** $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 2$

$2x + 4 = x + 8$

$2x - x = 8 - 4$

$x = 4$

**b** $\frac{1}{5}a = \frac{1}{2}a - 6$

$2a = 5a - 60$

$2a - 5a = -60$

$-3a = -60$

$a = 20$

**c** $\frac{1}{5}y = -y + 6$

$y = -5y + 30$

$y + 5y = 30$

$6y = 30$

$y = 5$

**d** $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 2$

$3x + 2 = 2x + 8$

$3x - 2x = 8 - 2$

$x = 6$

**e** $\frac{2}{5}x + 2 = -\frac{3}{5}$

$2x + 10 = -3$

$2x = -3 - 10$

$2x = -13$

$x = -6\frac{1}{2}$

**f** $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{5}x + 5$

$5x - 40 = 4x + 100$

$5x - 4x = 100 + 40$

$x = 140$

**Bladzijde 51**

**9**

**a** $5x - 10 < 4x + 6$

$5x - 4x < 6 + 10$

$x < 16$

**b** $4q > 3(7 + q)$

$4q > 21 + 3q$

$4q - 3q > 21$

$q > 21$

**c** $4(x - 1) > 5 - 3(2 - x)$

$4x - 4 > 5 - 6 + 3x$

$4x - 3x > 5 - 6 + 4$

$x > 3$

**d** $2(a + 5) < a - 100$

$2a + 10 < a - 100$

$2a - a < -100 - 10$

$a < -110$

**10** **a** $12(x-6) > -3(x-1)$
$12x - 72 > -3x + 3$
$12x + 3x > 3 + 72$
$15x > 75$
$x > 5$

**b** $\frac{1}{5}x - 2 > \frac{1}{6}x + 3$
$6x - 60 > 5x + 90$
$6x - 5x > 90 + 60$
$x > 150$

**c** $6(3p + 16) < 2p$
$18p + 96 < 2p$
$18p - 2p < -96$
$16p < -96$
$p < -6$

**Bladzijde 52**

**11** **a** $-3x < 18$
$x > -6$

**b** $3x > -6$
$x > -2$

**c** $-6x < 0$
$x > 0$

**12** **a** $7x + 8 > 11x + 20$
$7x - 11x > 20 - 8$
$-4x > 12$
$x < -3$

**b** $3(x-2) > 5(x-2)$
$3x - 6 > 5x - 10$
$3x - 5x > -10 + 6$
$-2x > -4$
$x < 2$

**c** $-3x < 2x - 5$
$-3x - 2x < -5$
$-5x < -5$
$x > 1$

**d** $x - 3 < x - (2 + 2x)$
$x - 3 < x - 2 - 2x$
$x - x + 2x < -2 + 3$
$2x < 1$
$x < \frac{1}{2}$

**13** **a** $5x > 11x + 6$
$5x - 11x > 6$
$-6x > 6$
$x < -1$

**b** $\frac{1}{2}x < 2x + 9$
$x < 4x + 18$
$x - 4x < 18$
$-3x < 18$
$x > -6$

**c** $6 - 2(x-3) < -(x-8) + 1$
$6 - 2x + 6 < -x + 8 + 1$
$-2x + x < 8 + 1 - 6 - 6$
$-x < -3$
$x > 3$

**d** $7x + 9 > 8(x-2) + 6$
$7x + 9 > 8x - 16 + 6$
$7x - 8x > -16 + 6 - 9$
$-x > -19$
$x < 19$

# 6 [HAVO-B/MBO] Algebra deel 2

## 6.1 Wortels

**Bladzijde 53**

**1**
**a** $(\sqrt{15})^2 = 15$
**b** $-(\sqrt{21})^2 = -21$
**c** $(\sqrt{40})^2 = 40$
**d** $(3\sqrt{8})^2 = 9 \cdot 8 = 72$

**2**
**a** $(-3\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$
**b** $-5\sqrt{25} - 4(\sqrt{3})^2 = -5 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -25 - 12 = -37$
**c** $-7(\sqrt{2})^2 = -7 \cdot 2 = -14$
**d** $(\sqrt{12})^2 - 2^2 = 12 - 4 = 8$

**Bladzijde 54**

**3**
**a** $3\sqrt{13} + \sqrt{13} = 4\sqrt{13}$
**b** $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$
**c** $7\sqrt{15} + 4\sqrt{15} = 11\sqrt{15}$
**d** $2\sqrt{2} - 11\sqrt{3}$ *kan niet*
**e** $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$
**f** $\sqrt{23} + \sqrt{23} = 2\sqrt{23}$
**g** $3\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 6\sqrt{11}$
**h** $2\sqrt{6} - 5$ *kan niet*

**4**
**a** $5\sqrt{8} + 12\sqrt{8} = 17\sqrt{8}$
**b** $(-2\sqrt{12})^2 = 4 \cdot 12 = 48$
**c** $5\sqrt{15} - 4\sqrt{15} = \sqrt{15}$
**d** $9\sqrt{20} - 11\sqrt{20} = -2\sqrt{20}$
**e** $(\sqrt{17})^2 - 4^2 = 17 - 16 = 1$
**f** $5\sqrt{13} - 12\sqrt{3}$ *kan niet*

**Bladzijde 55**

**5**
**a** $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} = 14\sqrt{15}$
**b** $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 14\sqrt{25} = 14 \cdot 5 = 70$
**c** $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$
**d** $8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} = 24\sqrt{10}$
**e** $2\sqrt{11} \cdot 9\sqrt{11} = 18\sqrt{121} = 18 \cdot 11 = 198$
**f** $-12 \cdot 4\sqrt{13} = -48\sqrt{13}$

**Bladzijde 56**

**6**
**a** $6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
**b** $12\sqrt{17} + 17$ *kan niet*
**c** $2(-5\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 25 \cdot 3 = 150$
**d** $6\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{5} = 42\sqrt{15}$
**e** $9\sqrt{13} - 3\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$
**f** $-3\sqrt{36} + 2(\sqrt{7})^2 = -3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = -18 + 14 = -4$

**Bladzijde 57**

**7**
**a** $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
**b** $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
**c** $\sqrt{150} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$
**d** $\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$
**e** $\sqrt{63} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
**f** $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

**8**
**a** $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
**b** $(3\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99$
**c** $8\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ *kan niet*
**d** $12\sqrt{17} - 5\sqrt{7}$ *kan niet*
**e** $7\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{7} = 35\sqrt{35}$
**f** $\sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
**g** $-3\sqrt{49} + 2(\sqrt{6})^2 = -3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = -21 + 12 = -9$
**h** $5\sqrt{16} - 3\sqrt{9} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 20 - 9 = 11$
**i** $9 + (2\sqrt{15})^2 - 4^2 = 9 + 4 \cdot 15 - 16 = 9 + 60 - 16 = 53$
**j** $5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{24} = 10\sqrt{144} = 10 \cdot 12 = 120$
**k** $14\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$
**l** $\sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
**m** $3(\sqrt{5})^2 - \sqrt{81} = 3 \cdot 5 - 9 = 15 - 9 = 6$
**n** $-4\sqrt{16} + (\sqrt{16})^2 = -4 \cdot 4 + 16 = -16 + 16 = 0$

## 6.2 Merkwaardige producten

**Bladzijde 58**

**9**
**a** $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
**b** $(a+7)(a-7)=a^2-49$
**c** $(b-9)(b+9)=b^2-81$
**d** $(3a+2)(3a-2)=9a^2-4$
**e** $(5x-6)(5x+6)=25x^2-36$
**f** $(8y+1)(8y-1)=64y^2-1$

**Bladzijde 59**

**10**
**a** $(p+5)^2=p^2+10p+25$
**b** $(q-4)^2=q^2-8q+16$
**c** $(x-1)^2=x^2-2x+1$
**d** $(b+7)^2=b^2+14b+49$
**e** $(e-3)^2=e^2-6e+9$
**f** $(y+10)^2=y^2+20y+100$
**g** $(a+9)^2=a^2+18a+81$
**h** $(b+4)^2=b^2+8b+16$
**i** $(7x+4y)^2=49x^2+56xy+16y^2$
**j** $(f-1)^2=f^2-2f+1$
**k** $(3c+8)^2=9c^2+48c+64$
**l** $(5g-3)^2=25g^2-30g+9$

**11**
**a** $(4x+9)^2=16x^2+72x+81$
**b** $(8x-3)^2=64x^2-48x+9$
**c** $(7a+2b)^2=49a^2+28ab+4b^2$
**d** $(5a+1)(5a-1)=25a^2-1$
**e** $(3-5a)^2=9-30a+25a^2$
**f** $(x+4y)^2=x^2+8xy+16y^2$
**g** $(8x-y)(8x+y)=64x^2-y^2$
**h** $(p-5q)(p+5q)=p^2-25q^2$

## 6.3 Ontbinden in factoren

**Bladzijde 61**

**12**
**a** $2x+8y=2(x+4y)$
**b** $4a-ab=a(4-b)$
**c** $x^2+20x=x(x+20)$
**d** $4p-6=2(2p-3)$
**e** $pq+3pr=p(q+3r)$
**f** $x^2-9x=x(x-9)$
**g** $xy-3yz=y(x-3z)$
**h** $3a-abc=a(3-bc)$
**i** $12p-8q=4(3p-2q)$
**j** $18x^2+9yz=9(2x^2+yz)$

**13**
**a** $2ab-6bc=2b(a-3c)$
**b** $12p+8q=4(3p+2q)$
**c** $9x^2+3x=3x(3x+1)$
**d** $18xy-12y=6y(3x-2)$
**e** $6x^2-12x=6x(x-2)$
**f** $c^2+c=c(c+1)$
**g** $a^2b-2b=b(a^2-2)$
**h** $2x^2-2x=2x(x-1)$

**Bladzijde 63**

**14** **a** Zie de tabel hiernaast.

| product 18 | | som |
|---|---|---|
| 1 | 18 | 19 |
| −1 | −18 | −19 |
| 2 | 9 | 11 |
| −2 | −9 | −11 |
| 3 | 6 | 9 |
| −3 | −6 | −9 |

**b** $x^2 + 11x + 18 = (x + 2)(x + 9)$
$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$
$x^2 + 19x + 18 = (x + 1)(x + 18)$
$x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$

**15** **a** Zie de tabel hiernaast.

| product 16 | | som |
|---|---|---|
| 1 | 16 | 17 |
| −1 | −16 | −17 |
| 2 | 8 | 10 |
| −2 | −8 | −10 |
| 4 | 4 | 8 |
| −4 | −4 | −8 |

**b** $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$
$x^2 + 17x + 16 = (x + 1)(x + 16)$
$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4)$

**16** **a** $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$
**b** $x^2 - 10x + 9 = (x - 1)(x - 9)$

**17** **a** $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$
**b** $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6)$

**18** **a** $x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$
**b** $25a^2 - 30a = 5a(5a - 6)$
**c** $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$
**d** $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
**e** $10pq + 5p = 5p(2q + 1)$
**f** $x^2 - 13x + 12 = (x - 12)(x - 1)$

# 7 [HAVO-B] Kwadratische vergelijkingen

## 7.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

**Bladzijde 64**

**1** **a** $8x(4x - 8) = 0$
$8x = 0 \vee 4x - 8 = 0$
$x = 0 \vee 4x = 8$
$x = 0 \vee x = 2$

**b** $(3x + 12)(x - 6) = 0$
$3x + 12 = 0 \vee x - 6 = 0$
$3x = -12 \vee x = 6$
$x = -4 \vee x = 6$

**c** $5x(x + 7) = 0$
$5x = 0 \vee x + 7 = 0$
$x = 0 \vee x = -7$

**d** $(x - 4)(3x - 15) = 0$
$x - 4 = 0 \vee 3x - 15 = 0$
$x = 4 \vee 3x = 15$
$x = 4 \vee x = 5$

**Bladzijde 65**

**2** **a** $x^2 + 5x - 24 = 0$
$(x - 3)(x + 8) = 0$
$x - 3 = 0 \vee x + 8 = 0$
$x = 3 \vee x = -8$

**b** $x^2 - 8x = 33$
$x^2 - 8x - 33 = 0$
$(x + 3)(x - 11) = 0$
$x + 3 = 0 \vee x - 11 = 0$
$x = -3 \vee x = 11$

**c** $x^2 = 6x$
$x^2 - 6x = 0$
$x(x - 6) = 0$
$x = 0 \vee x - 6 = 0$
$x = 0 \vee x = 6$

**d** $4x^2 + 2x = 0$
$2x(2x + 1) = 0$
$2x = 0 \vee 2x + 1 = 0$
$x = 0 \vee 2x = -1$
$x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$

**e** $b^2 + 7b + 12 = 0$
$(b + 3)(b + 4) = 0$
$b + 3 = 0 \vee b + 4 = 0$
$b = -3 \vee b = -4$

**f** $x^2 - 15 = -2x$
$x^2 + 2x - 15 = 0$
$(x - 3)(x + 5) = 0$
$x - 3 = 0 \vee x + 5 = 0$
$x = 3 \vee x = -5$

**3** **a** $14x^2 = 21x$
$14x^2 - 21x = 0$
$7x(2x - 3) = 0$
$7x = 0 \vee 2x - 3 = 0$
$x = 0 \vee 2x = 3$
$x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$

**b** $(x + 8)(x - 5) = 0$
$x + 8 = 0 \vee x - 5 = 0$
$x = -8 \vee x = 5$

**c** $x^2 + 11x + 10 = 0$
$(x + 1)(x + 10) = 0$
$x + 1 = 0 \vee x + 10 = 0$
$x = -1 \vee x = -10$

**d** $x^2 + 12x = -35$
$x^2 + 12x + 35 = 0$
$(x + 7)(x + 5) = 0$
$x + 7 = 0 \vee x + 5 = 0$
$x = -7 \vee x = -5$

**e** $x^2 = 14x - 40$
$x^2 - 14x + 40 = 0$
$(x - 4)(x - 10) = 0$
$x - 4 = 0 \vee x - 10 = 0$
$x = 4 \vee x = 10$

**f** $a^2 - 50 = 4 - 3a$
$a^2 + 3a - 54 = 0$
$(a - 6)(a + 9) = 0$
$a - 6 = 0 \vee a + 9 = 0$
$a = 6 \vee a = -9$

**Bladzijde 66**

**4** **a** $x^2 = 100$
$x = 10 \vee x = -10$

**b** $x^2 = -20$
geen oplossing

**c** $-x^2 = 144$
$x^2 = -144$
geen oplossing

**d** $x^2 + 64 = 0$
$x^2 = -64$
geen oplossing

**e** $5x^2 - 45 = 0$
$5x^2 = 45$
$x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -3$

**f** $3x^2 + 2 = 101$
$3x^2 = 99$
$x^2 = 33$
$x = \sqrt{33} \vee x = -\sqrt{33}$

**5** **a** $(x + 3)(x - 8) = 0$
$x + 3 = 0 \vee x - 8 = 0$
$x = -3 \vee x = 8$

**b** $p(3p + 9) = 0$
$p = 0 \vee 3p + 9 = 0$
$p = 0 \vee 3p = -9$
$p = 0 \vee p = -3$

**c** $5c^2 + 25c = 0$
$5c(c + 5) = 0$
$5c = 0 \vee c + 5 = 0$
$c = 0 \vee c = -5$

**d** $x^2 - 4x = 21$
$x^2 - 4x - 21 = 0$
$(x + 3)(x - 7) = 0$
$x + 3 = 0 \vee x - 7 = 0$
$x = -3 \vee x = 7$

**e** $x^2 - 3x = -2x$
$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = 0 \vee x = 1$

**f** $3b^2 = -15b$
$3b^2 + 15b = 0$
$3b(b + 5) = 0$
$3b = 0 \vee b + 5 = 0$
$b = 0 \vee b = -5$

**g** $(x-7)(3x+6)=0$
$x-7=0 \vee 3x+6=0$
$x=7 \vee 3x=-6$
$x=7 \vee x=-2$

**h** $-3x^2-1=50$
$-3x^2=51$
$x^2=-17$
geen oplossing

**i** $6b^2=96$
$b^2=16$
$b=4 \vee b=-4$

**6** **a** $x^2-10=0$
$x^2=10$
$x=\sqrt{10} \vee x=-\sqrt{10}$

**b** $q^2+15q=-50$
$q^2+15q+50=0$
$(q+5)(q+10)=0$
$q+5=0 \vee q+10=0$
$q=-5 \vee q=-10$

**c** $p(5p+10)=0$
$p=0 \vee 5p+10=0$
$p=0 \vee 5p=-10$
$p=0 \vee p=-2$

**d** $x^2+5x=2x$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x=0 \vee x+3=0$
$x=0 \vee x=-3$

**e** $x^2+12x=-27$
$x^2+12x+27=0$
$(x+3)(x+9)=0$
$x+3=0 \vee x+9=0$
$x=-3 \vee x=-9$

**f** $x^2+9x=-14+9x$
$x^2=-14$
geen oplossing

**g** $x^2-x=20$
$x^2-x-20=0$
$(x+4)(x-5)=0$
$x+4=0 \vee x-5=0$
$x=-4 \vee x=5$

**h** $5x^2=10$
$x^2=2$
$x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

**i** $9x^2=900$
$x^2=100$
$x=10 \vee x=-10$

## 7.2 De *abc*-formule

**Bladzijde 68**

**7** **a** $3x^2-7x+2=0$
$a=3$, $b=-7$ en $c=2$
$D=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 2=25$
$x=\dfrac{7+\sqrt{25}}{6} \vee x=\dfrac{7-\sqrt{25}}{6}$
$x=2 \vee x=\frac{1}{3}$

**b** $5x^2=4+x$
$5x^2-x-4=0$
$a=5$, $b=-1$ en $c=-4$
$D=(-1)^2-4\cdot 5\cdot -4=81$
$x=\dfrac{1+\sqrt{81}}{10} \vee x=\dfrac{1-\sqrt{81}}{10}$
$x=1 \vee x=-\frac{4}{5}$

**c** $4x^2 + 9x = -2$
$4x^2 + 9x + 2 = 0$
$a = 4$, $b = 9$ en $c = 2$
$D = 9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$
$$x = \frac{-9 + \sqrt{49}}{8} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{49}}{8}$$
$x = -\frac{1}{4} \vee x = -2$

**d** $4x^2 + 5x + 1 = 0$
$a = 4$, $b = 5$ en $c = 1$
$D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$
$$x = \frac{-5 + \sqrt{9}}{8} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{9}}{8}$$
$x = -\frac{1}{4} \vee x = -1$

**e** $2x^2 + 3x = 5$
$2x^2 + 3x - 5 = 0$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = -5$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$
$$x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{4}$$
$x = 1 \vee x = -2\frac{1}{2}$

**f** $4x^2 - 8x + 3 = 0$
$a = 4$, $b = -8$ en $c = 3$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16$
$$x = \frac{8 + \sqrt{16}}{8} \vee x = \frac{8 - \sqrt{16}}{8}$$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

**8** **a** $x^2 + 10x + 13 = 0$
$a = 1$, $b = 10$ en $c = 13$
$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 48$
$$x = \frac{-10 + \sqrt{48}}{2} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{48}}{2}$$

**b** $x^2 = 5x + 8$
$x^2 - 5x - 8 = 0$
$a = 1$, $b = -5$ en $c = -8$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 57$
$$x = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

**c** $4x^2 = 5x + 2$
$4x^2 - 5x - 2 = 0$
$a = 4$, $b = -5$ en $c = -2$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 57$
$$x = \frac{5 + \sqrt{57}}{8} \vee x = \frac{5 - \sqrt{57}}{8}$$

**d** $8x^2 = x + 10$
$8x^2 - x - 10 = 0$
$a = 8$, $b = -1$ en $c = -10$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot -10 = 321$
$$x = \frac{1 + \sqrt{321}}{16} \vee x = \frac{1 - \sqrt{321}}{16}$$

**e** $x^2 = -3x + 1$
$x^2 + 3x - 1 = 0$
$a = 1$, $b = 3$ en $c = -1$
$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$
$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

**Bladzijde 69**

**9** **a** $4x^2 + 2x + 3 = 0$
$a = 4$, $b = 2$ en $c = 3$
$D = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44$
$D < 0$, dus geen oplossing.

**b** $7x + 2 = x^2$
$-x^2 + 7x + 2 = 0$
$a = -1$, $b = 7$ en $c = 2$
$D = 7^2 - 4 \cdot -1 \cdot 2 = 57$
$$x = \frac{-7 + \sqrt{57}}{-2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{57}}{-2}$$

**c** $15x^2 = 8x + 5$
$15x^2 - 8x - 5 = 0$
$a = 15$, $b = -8$ en $c = -5$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 15 \cdot -5 = 364$
$$x = \frac{8 + \sqrt{364}}{30} \vee x = \frac{8 - \sqrt{364}}{30}$$

**d** $-x^2 + 5x + 3 = 0$
$a = -1$, $b = 5$ en $c = 3$
$D = 5^2 - 4 \cdot -1 \cdot 3 = 37$
$$x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{-2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{-2}$$

**e** $14x - 5x^2 - 3 = 0$
$-5x^2 + 14x - 3 = 0$
$a = -5$, $b = 14$ en $c = -3$
$D = 14^2 - 4 \cdot -5 \cdot -3 = 136$
$$x = \frac{-14 + \sqrt{136}}{-10} \vee x = \frac{-14 - \sqrt{136}}{-10}$$

**f** $-2x^2 = 3x + 5$
$-2x^2 - 3x - 5 = 0$
$a = -2$, $b = -3$ en $c = -5$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot -2 \cdot -5 = -31$
$D < 0$, dus geen oplossing.

**10** **a** $20x^2 + 25x + 1 = 0$
$a = 20$, $b = 25$ en $c = 1$
$D = 25^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1 = 545$
$$x = \frac{-25 + \sqrt{545}}{40} \vee x = \frac{-25 - \sqrt{545}}{40}$$

**b** $3x + 1 = 2x^2$
$-2x^2 + 3x + 1 = 0$
$a = -2$, $b = 3$ en $c = 1$
$D = 3^2 - 4 \cdot -2 \cdot 1 = 17$
$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4}$$

**c** $2x^2 = x - 5$
$2x^2 - x + 5 = 0$
$a = 2$, $b = -1$ en $c = 5$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39$
$D < 0$, dus geen oplossing.

**d** $-3x^2 + 7x + 2 = 0$
$a = -3$, $b = 7$ en $c = 2$
$D = 7^2 - 4 \cdot -3 \cdot 2 = 73$
$$x = \frac{-7 + \sqrt{73}}{-6} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{73}}{-6}$$

**e** $5x^2 - 12x - 10 = 0$
$a = 5$, $b = -12$ en $c = -10$
$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -10 = 344$
$$x = \frac{12 + \sqrt{344}}{10} \vee x = \frac{12 - \sqrt{344}}{10}$$

**f** $x^2 + 5x + 9 = 0$
$a = 1$, $b = 5$ en $c = 9$
$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -11$
$D < 0$, dus geen oplossing.

**g** $x^2 - 4 = 2x$
$x^2 - 2x - 4 = 0$
$a = 1$, $b = -2$ en $c = -4$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 20$
$x = \dfrac{2 + \sqrt{20}}{2} \vee x = \dfrac{2 - \sqrt{20}}{2}$

**h** $6x^2 + x = 1$
$6x^2 + x - 1 = 0$
$a = 6$, $b = 1$ en $c = -1$
$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 25$
$x = \dfrac{-1 + \sqrt{25}}{12} \vee x = \dfrac{-1 - \sqrt{25}}{12}$
$x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$

# 8 [HAVO-B/MBO] Kwadratische functies

**Bladzijde 71**

**1**
**a** $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$
**b** $f(x) = -x^2 + 3x$
**c** $f(x) = 4x^2 + 2$
**d** $a = 5$, $b = -1$ en $c = 1$
**e** $a = -1$, $b = 8$ en $c = 0$
**f** $a = 3$, $b = 0$ en $c = -11$

**2**
**a** $y = x^2 - 8x$
**b** $f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$
$f(-4) = (-4)^2 - 8 \cdot -4 = 48$
**c** $f(-10) = (-10)^2 - 8 \cdot -10 = 180$
Het punt $A$ ligt dus op de grafiek van $f$.
**d** $f(-5) = (-5)^2 - 8 \cdot -5 = 65$
Het punt $B$ ligt dus niet op de grafiek van $f$.

**3**
**a** $h(-3) = (-3)^2 - -3 - 2 = 10$
$h(5) = 5^2 - 5 - 2 = 18$
**c** $y_A = 4^2 - 4 - 2 = 10$
**b** $y_B = (-5)^2 - -5 - 2 = 28$

**Bladzijde 72**

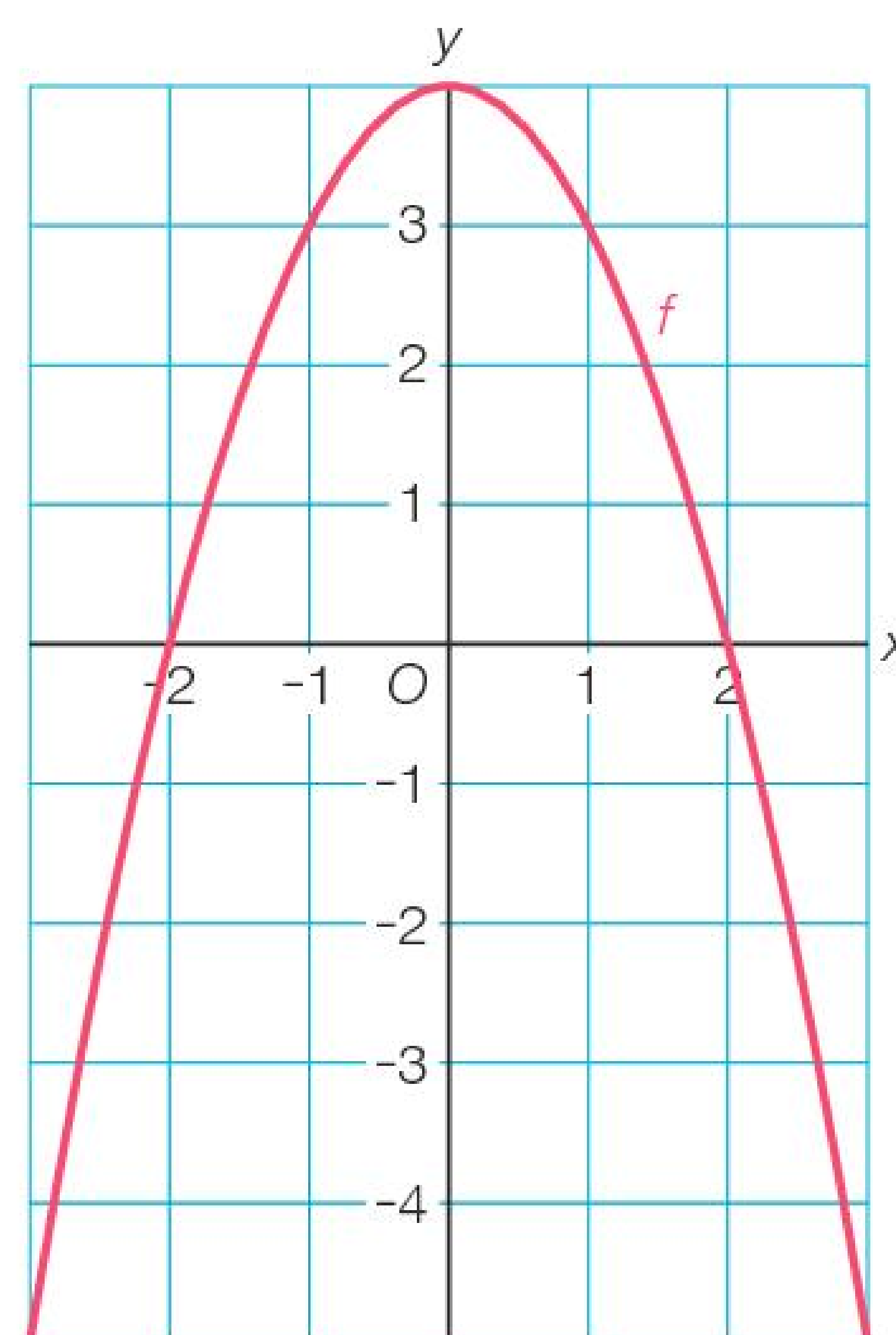
**4**
**a** $a = 2$ en $b = -8$, dus $x_{top} = -\dfrac{-8}{2 \cdot 2} = 2$.
$y_{top} = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 2 = -10$
Dus de top is $(2, -10)$.
**b** $a = -\frac{1}{2}$ en $b = -1$, dus $x_{top} = -\dfrac{-1}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = -1$.
$y_{top} = g(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - -1 - 4 = -3\frac{1}{2}$
Dus de top is $(-1, -3\frac{1}{2})$.
**c** $a = 1$ en $b = -8$, dus $x_{top} = -\dfrac{-8}{2 \cdot 1} = 4$.
$y_{top} = h(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$
Dus de top is $(4, -16)$.
**d** $a = -3$ en $b = 0$, dus $x_{top} = -\dfrac{0}{2 \cdot -3} = 0$.
$y_{top} = k(0) = 4$
Dus de top is $(0, 4)$.

**5** **a** $a = -1$ en $b = 0$, dus $x_{top} = -\frac{0}{2 \cdot -1} = 0$.

**b**

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-5$ | $0$ | $3$ | $4$ | $3$ | $0$ | $-5$ |

Zie de grafiek hiernaast.



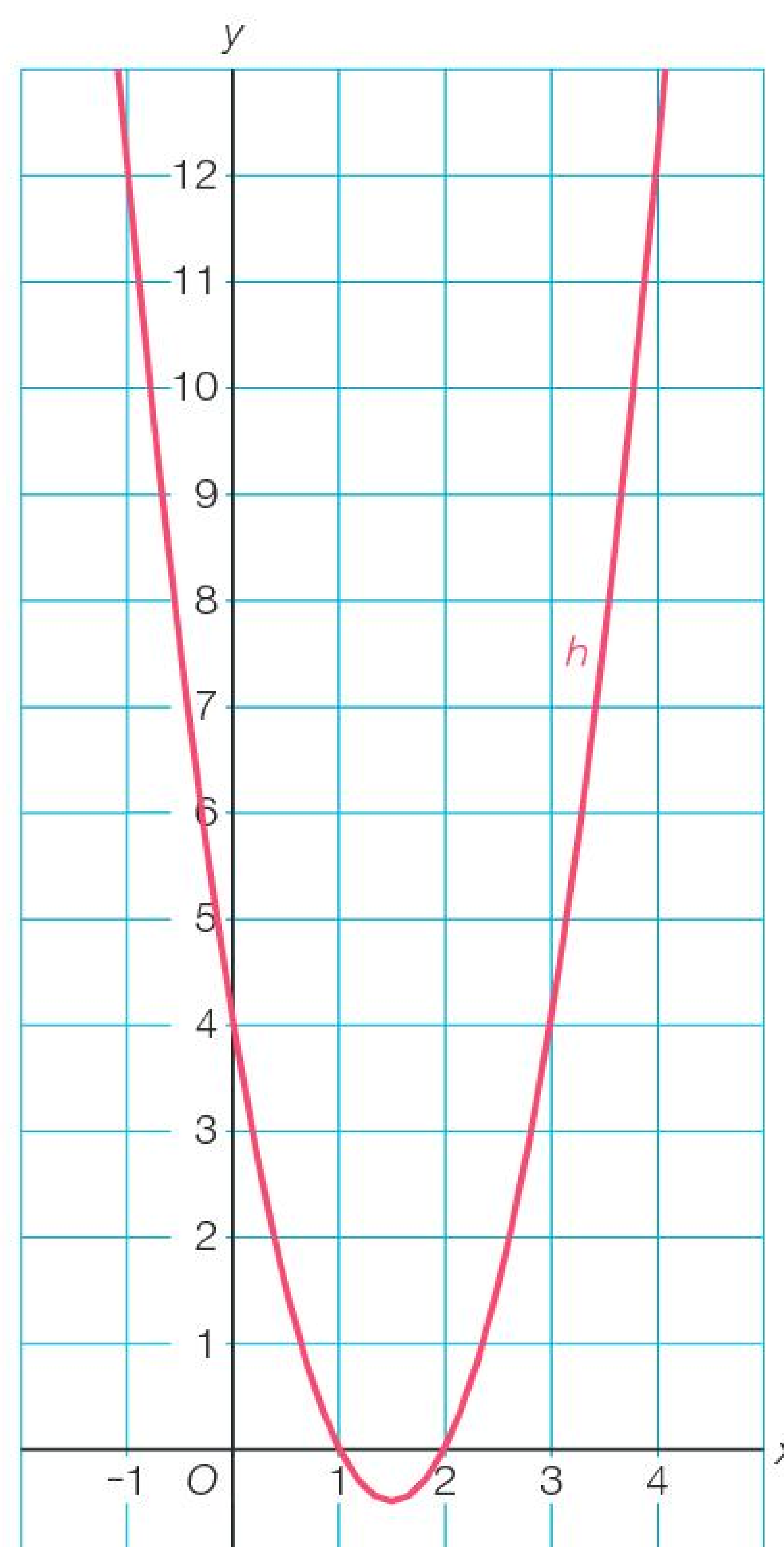

**6** **a** $a = 2$ en $b = -6$, dus $x_{top} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1\frac{1}{2}$.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1\frac{1}{2}$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $12$ | $4$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $4$ | $12$ |

Zie de grafiek hiernaast.

**b** $h(-10) = 2 \cdot (-10)^2 - 6 \cdot -10 + 4 = 264$

Het punt ligt dus op de grafiek van $h$.



# 9 [HAVO-B] Kwadratische vormen

## 9.1 Snijpunten met de *x*-as en de *y*-as

**Bladzijde 73**

**1** $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 5x = 0$

$$x(x + 5) = 0$$
$$x = 0 \vee x + 5 = 0$$
$$x = 0 \vee x = -5$$

De snijpunten met de $x$-as zijn $(-5, 0)$ en $(0, 0)$.

**2** $g(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 12 = 0$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$
$$x + 3 = 0 \vee x - 4 = 0$$
$$x = -3 \vee x = 4$$

Dus $A(-3, 0)$ en $B(4, 0)$.
$g(0) = -12$, dus $C(0, -12)$.

## 9.2 De parabool *y* = *a*(*x* - *d*)(*x* - *e*)

**Bladzijde 74**

**3** **a** $f(-4) = 3(-4 + 4)(-4 - 2) = 3 \cdot 0 \cdot -6 = 0$
$f(4) = 3(4 + 4)(4 - 2) = 3 \cdot 8 \cdot 2 = 48$
$f(0) = 3(0 + 4)(0 - 2) = 3 \cdot 4 \cdot -2 = -24$
$f(2) = 3(2 + 4)(2 - 2) = 3 \cdot 6 \cdot 0 = 0$

**b** $a = 3$, $d = -4$ en $e = 2$

**c** $f(x) = 3(x + 4)(x - 2) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3(x^2 + 2x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$
Dus $a = 3$, $b = 6$ en $c = -24$.

**4** **a** $g(-2) = -\frac{1}{2}(-2 + 2)(-2 + 4) = -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2 = 0$
$g(0) = -\frac{1}{2}(0 + 2)(0 + 4) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = -4$
$g(-4) = -\frac{1}{2}(-4 + 2)(-4 + 4) = -\frac{1}{2} \cdot -2 \cdot 0 = 0$

**b** $a = -\frac{1}{2}$, $d = -2$ en $e = -4$

**c** $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x + 4) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2x + 8) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 8)$
$= -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4$

**Bladzijde 76**

**5**
**a** (7, 0) en (12, 0)
**b** (−19, 0) en (−8, 0)
**c** (−36, 0) en (11, 0)
**d** (0, 0) en (125, 0)
**e** (−160, 0) en (20, 0)
**f** (0, 0) en (116, 0)

**6**
**a** De snijpunten met de $x$-as zijn (6, 0) en (10, 0).
$f(0) = \frac{1}{2}(0 - 6)(0 - 10) = \frac{1}{2} \cdot -6 \cdot -10 = 30$
Dus het snijpunt met de $y$-as is (0, 30).
$x_{top} = \frac{6 + 10}{2} = 8$
$y_{top} = f(8) = \frac{1}{2}(8 - 6)(8 - 10) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot -2 = -2$
Dus de top is (8, −2).
**b** De snijpunten met de $x$-as zijn (−5, 0) en (3, 0).
$g(0) = -5(0 + 5)(0 - 3) = -5 \cdot 5 \cdot -3 = 75$
Dus het snijpunt met de $y$-as is (0, 75).
$x_{top} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$
$y_{top} = g(-1) = -5(-1 + 5)(-1 - 3) = -5 \cdot 4 \cdot -4 = 80$
Dus de top is (−1, 80).
**c** Snijpunten met de $x$-as zijn (−10, 0) en (0, 0).
De grafiek gaat door (0, 0), dus het snijpunt met de $y$-as is (0, 0).
$x_{top} = \frac{-10 + 0}{2} = -5$
$y_{top} = h(-5) = 6 \cdot -5(-5 + 10) = 6 \cdot -5 \cdot 5 = -150$
Dus de top is (−5, −150).
**d** Snijpunten met de $x$-as zijn (−24, 0) en (−16, 0).
$k(0) = -(0 + 16)(0 + 24) = -16 \cdot 24 = -384$
Dus het snijpunt met de $y$-as is (0, −384).
$x_{top} = \frac{-24 + -16}{2} = -20$
$y_{top} = k(-20) = -(-20 + 16)(-20 + 24) = -1 \cdot -4 \cdot 4 = 16$
Dus de top is (−20, 16).

**7**
**a** $h(0) = 4 \cdot 0(0 - 6) = 0$
$h(2) = 4 \cdot 2(2 - 6) = 4 \cdot 2 \cdot -4 = -32$
$h(6) = 4 \cdot 6(6 - 6) = 4 \cdot 6 \cdot 0 = 0$
**b** $a = 4$, $d = 0$ en $e = 6$
**c** $h(x) = 4x(x - 6) = 4x^2 - 24x$

**8** **a** De snijpunten met de $x$-as zijn $A(-2, 0)$ en $B(5, 0)$.
$f(0) = -2(0 + 2)(0 - 5) = -2 \cdot 2 \cdot -5 = 20$, dus $C(0, 20)$.
$x_{top} = \frac{-2 + 5}{2} = 1\frac{1}{2}$
$y_{top} = f(1\frac{1}{2}) = -2(1\frac{1}{2} + 2)(1\frac{1}{2} - 5) = -2 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{2} = 24\frac{1}{2}$
Dus $T(1\frac{1}{2}, 24\frac{1}{2})$.

**b** $y_D = f(4) = -2(4 + 2)(4 - 5) = -2 \cdot 6 \cdot -1 = 12$

**c** $f(x) = -2(x + 2)(x - 5) = -2(x^2 - 5x + 2x - 10) = -2(x^2 - 3x - 10)$
$= -2x^2 + 6x + 20$

## 9.3 Parabolen verschuiven

**Bladzijde 77**

**9** Als je de rode grafiek 3 omhoog schuift, valt hij samen met de blauwe grafiek.

**10** **a** $a\colon y = x^2 + 3$
$b\colon y = x^2 - 1$

**b** $p\colon y = -x^2 + 3$
$q\colon y = -x^2 - 1$

**Bladzijde 78**

**11** $g(x) = -3x^2 + 5$

**Bladzijde 79**

**12** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \xrightarrow{\text{5 naar rechts}} y = \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 3$
Dus $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 3$.

**13** **a** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{\text{4 omhoog}} y = -\frac{1}{4}x^2 + 10$

**b** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{\text{2 omlaag}} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

**c** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{\text{1 naar links}} y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 6$
$y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 6 \xrightarrow{\text{8 omhoog}} y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 14$

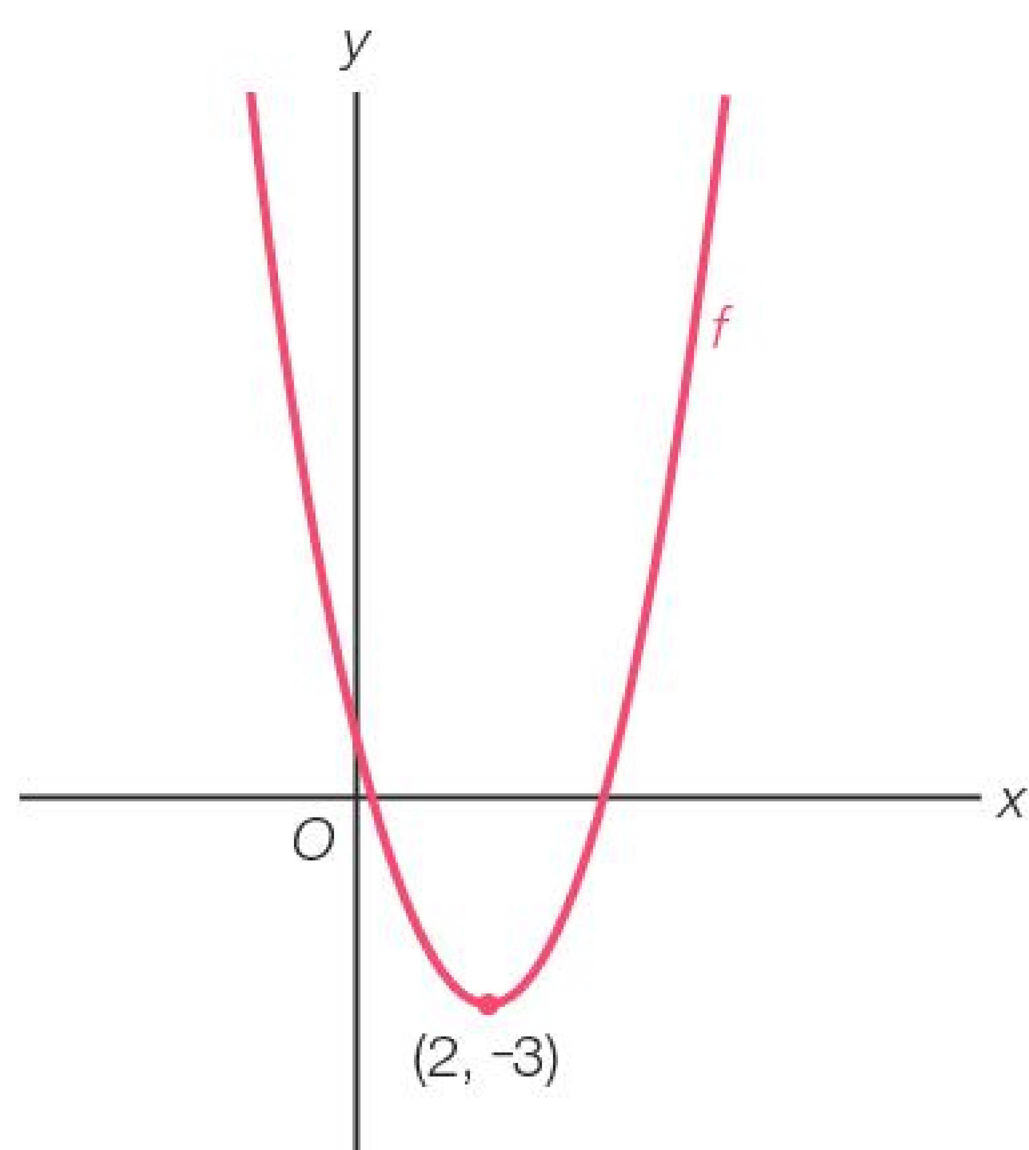
**d** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{\text{2 naar rechts}} y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 6$
$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 6 \xrightarrow{\text{3 omlaag}} y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 3$

**14** **a** De grafiek van $f(x) = x^2$ moet 2 naar rechts en 5 omhoog geschoven worden om de grafiek van $g(x) = (x - 2)^2 + 5$ te krijgen.

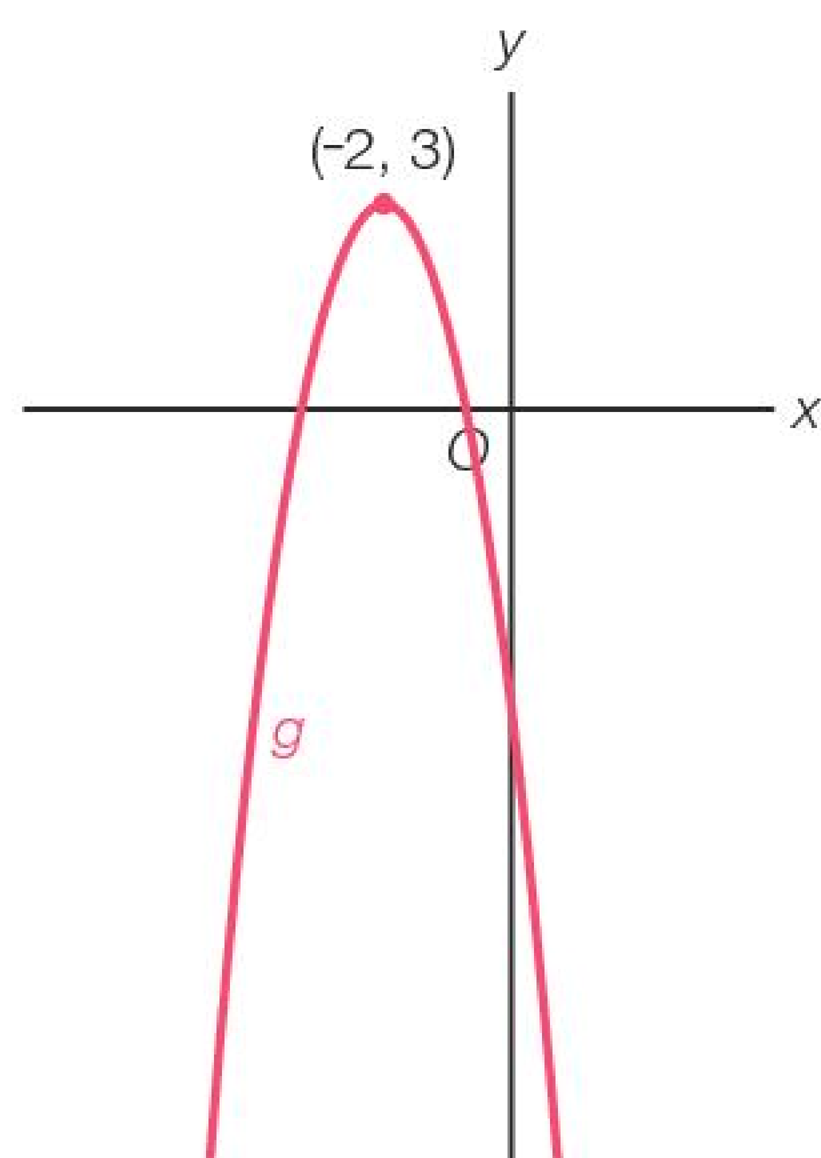
**b** De grafiek van $h(x) = -2x^2$ moet 3 naar links en 8 omlaag geschoven worden om de grafiek van $k(x) = -2(x + 3)^2 - 8$ te krijgen.

**Bladzijde 80**

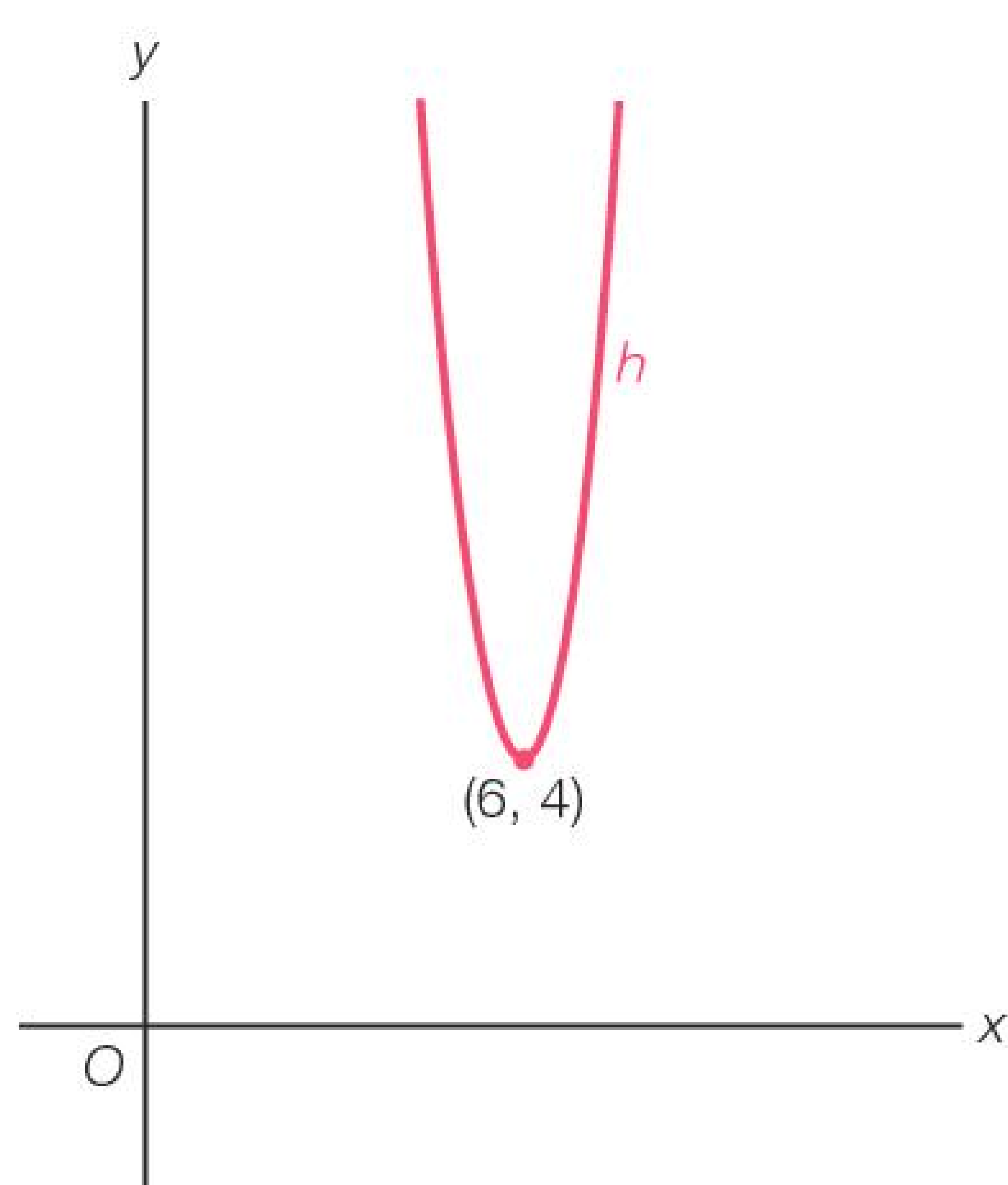
**15** **a**



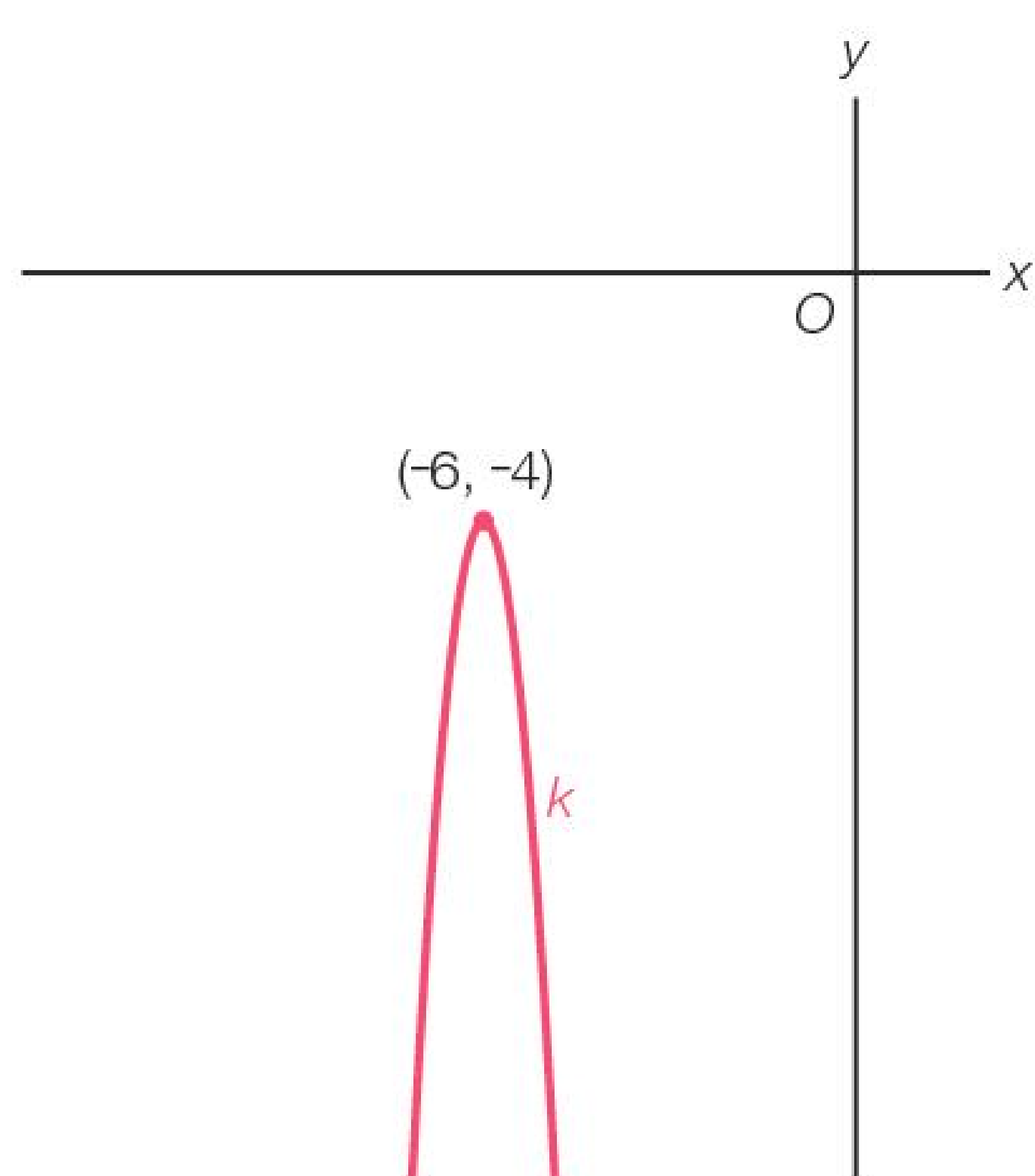

**b**



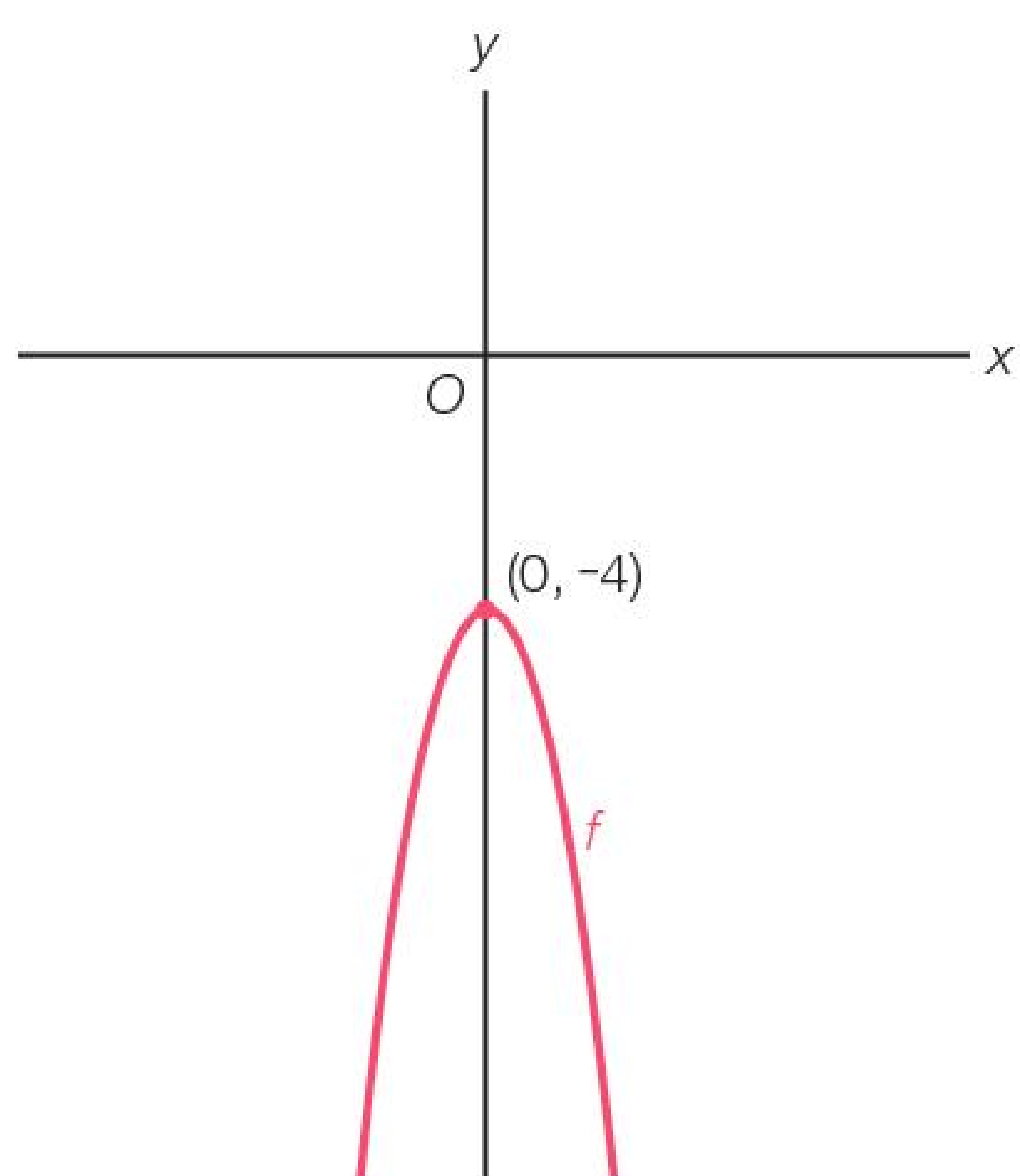

**c**



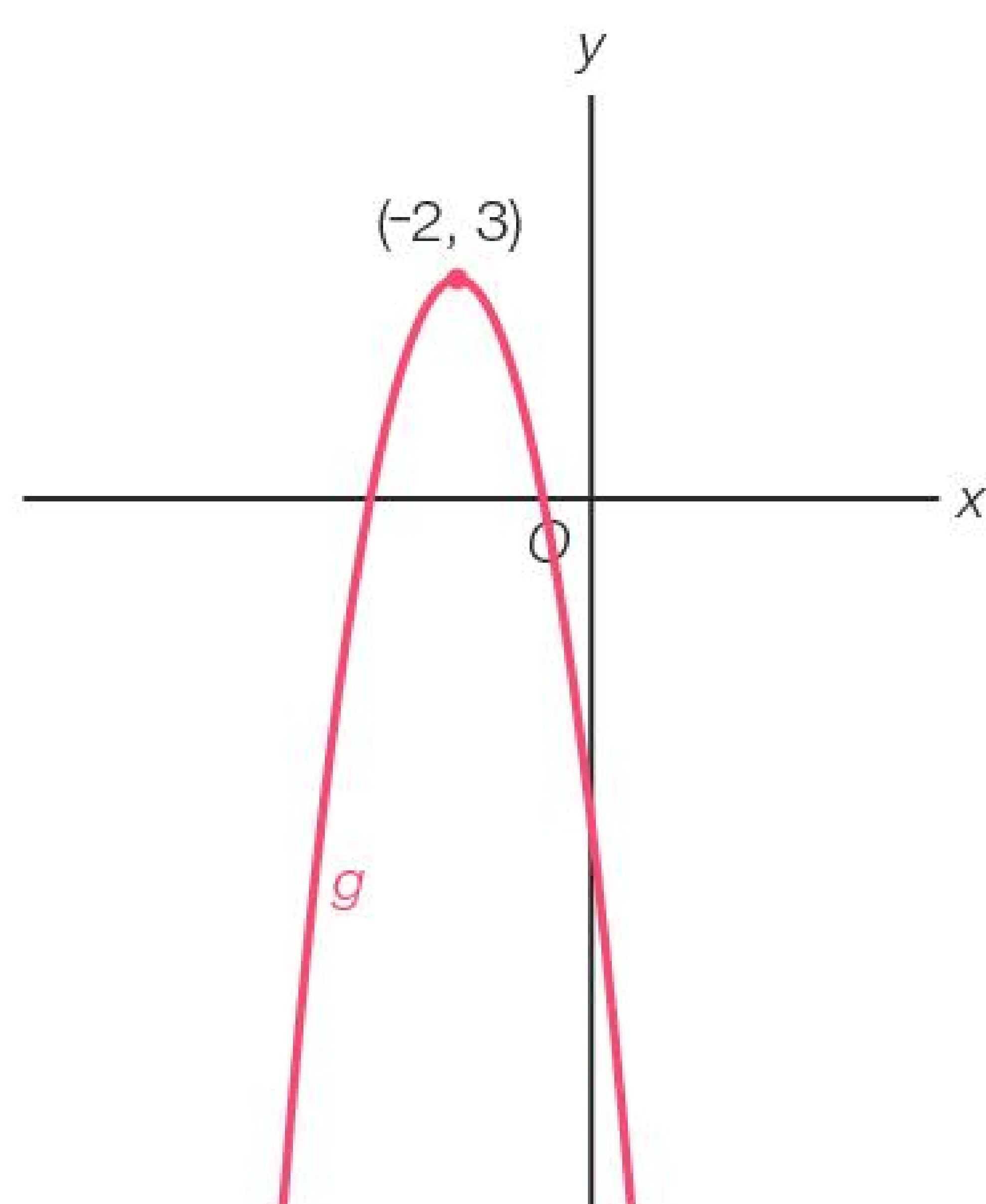

**d**



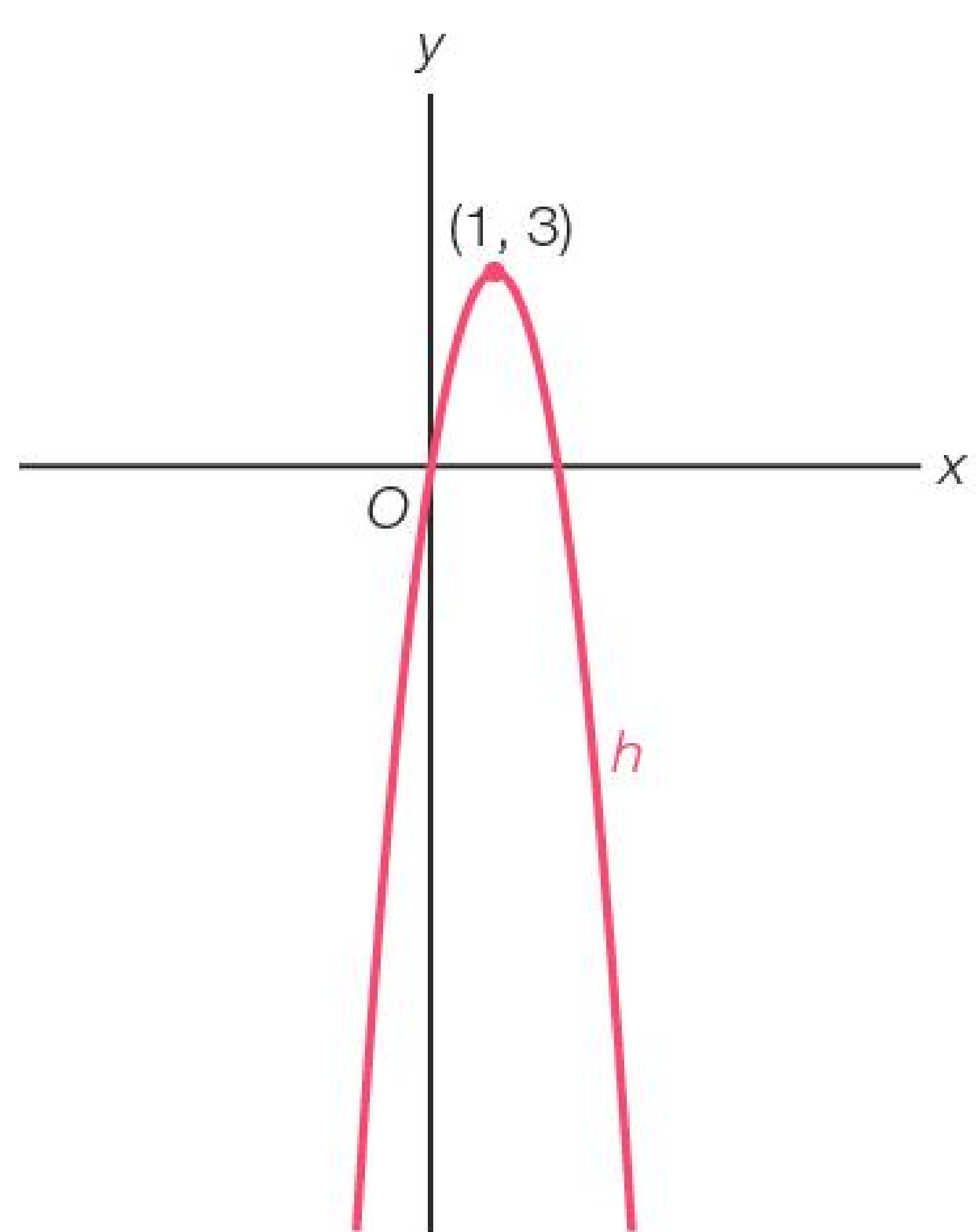

**16** **a**



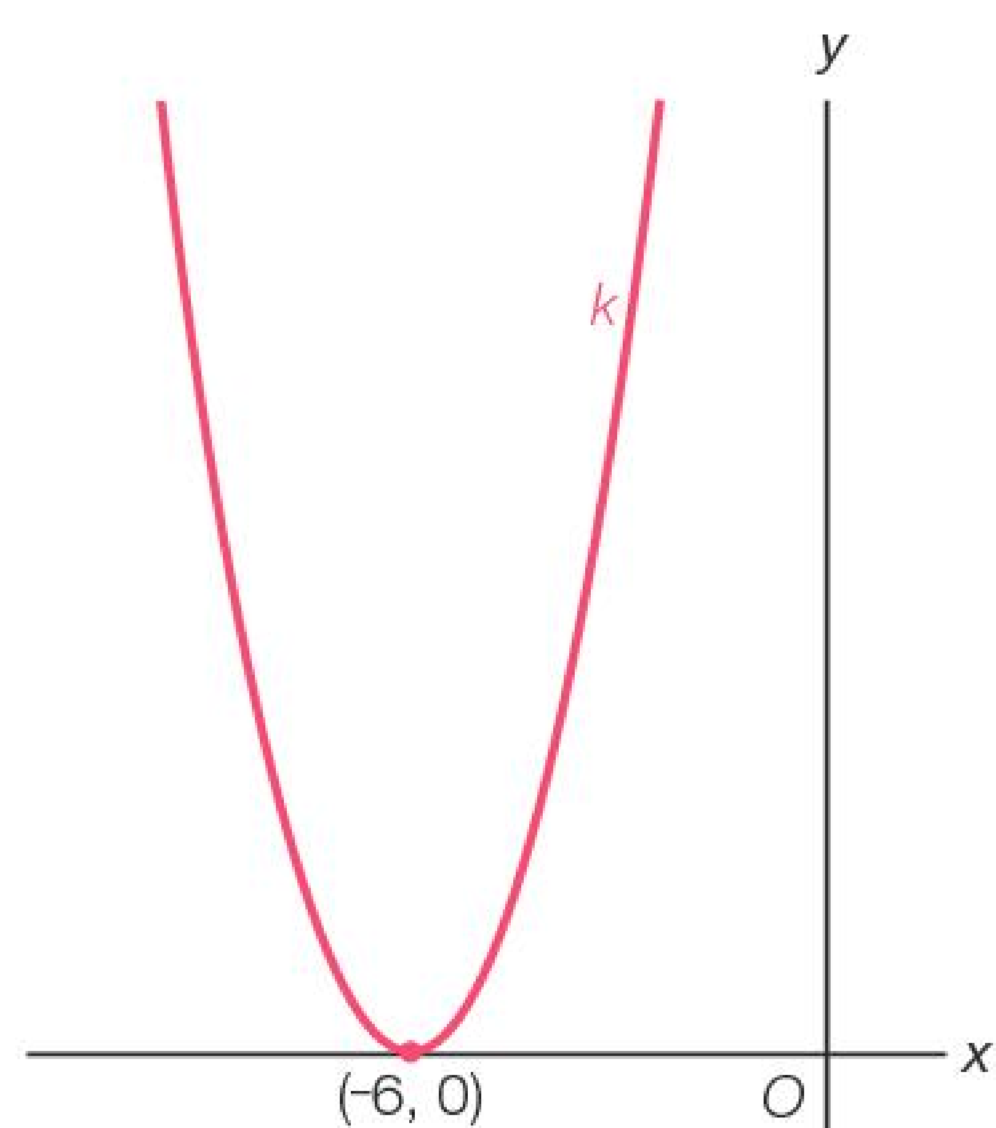

**b**



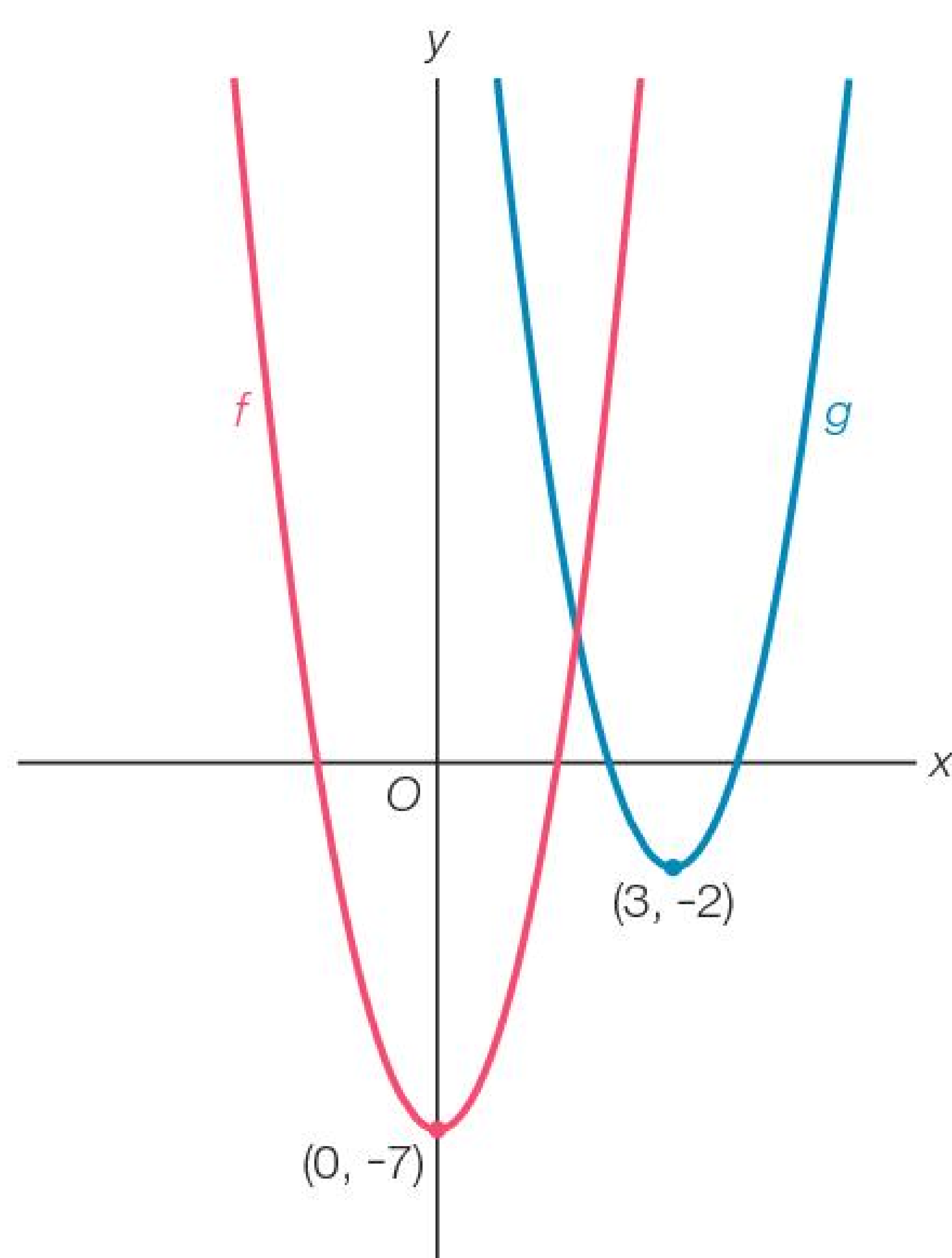
**c**




**d**




**17** **a, b**



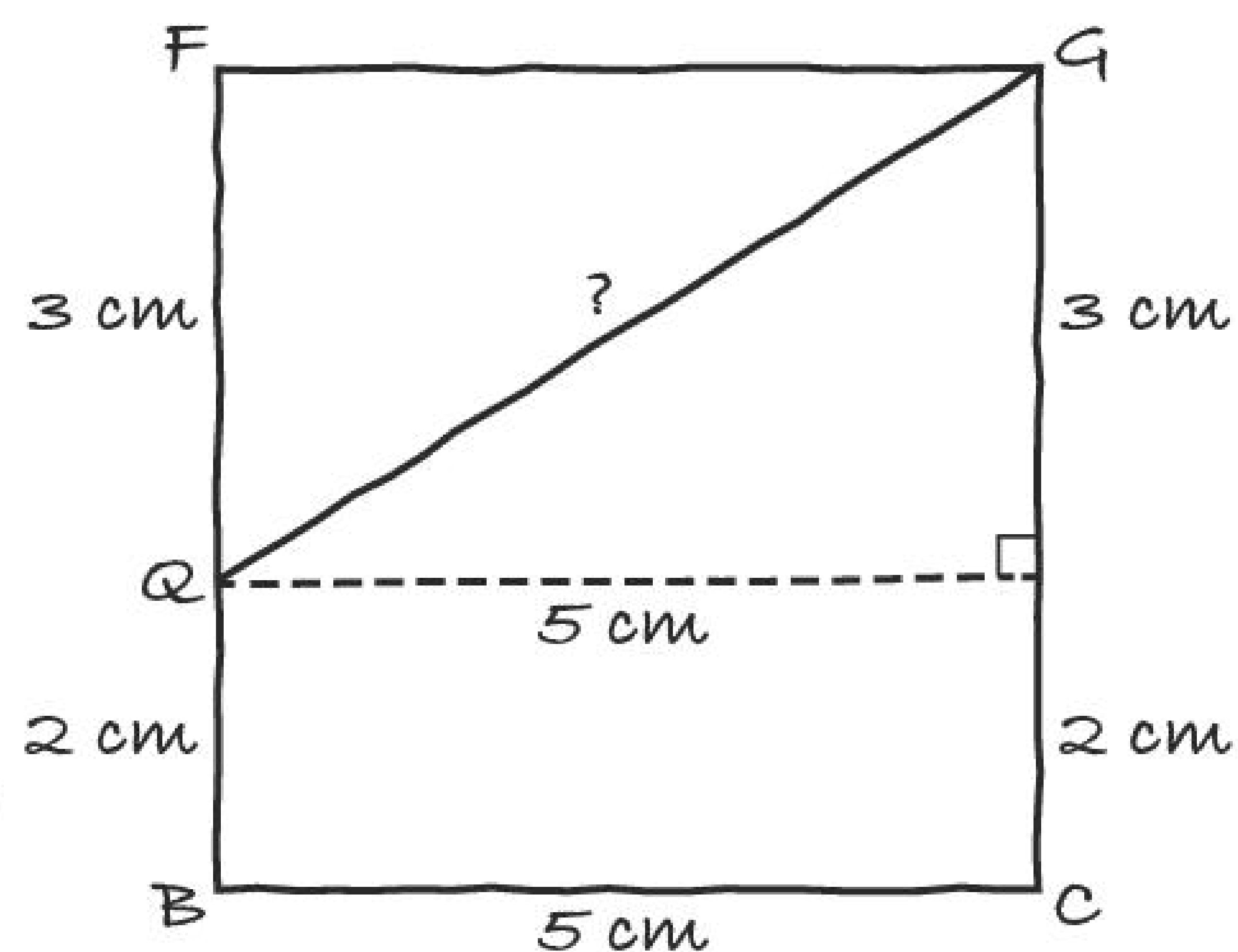

**b** $g(x) = 3(x - 3)^2 - 2$

# 10 [MBO] Ruimtemeetkunde

## 10.1 Pythagoras en doorsnede

**Bladzijde 82**

**1** **a** Zie de figuur hiernaast.




**b**

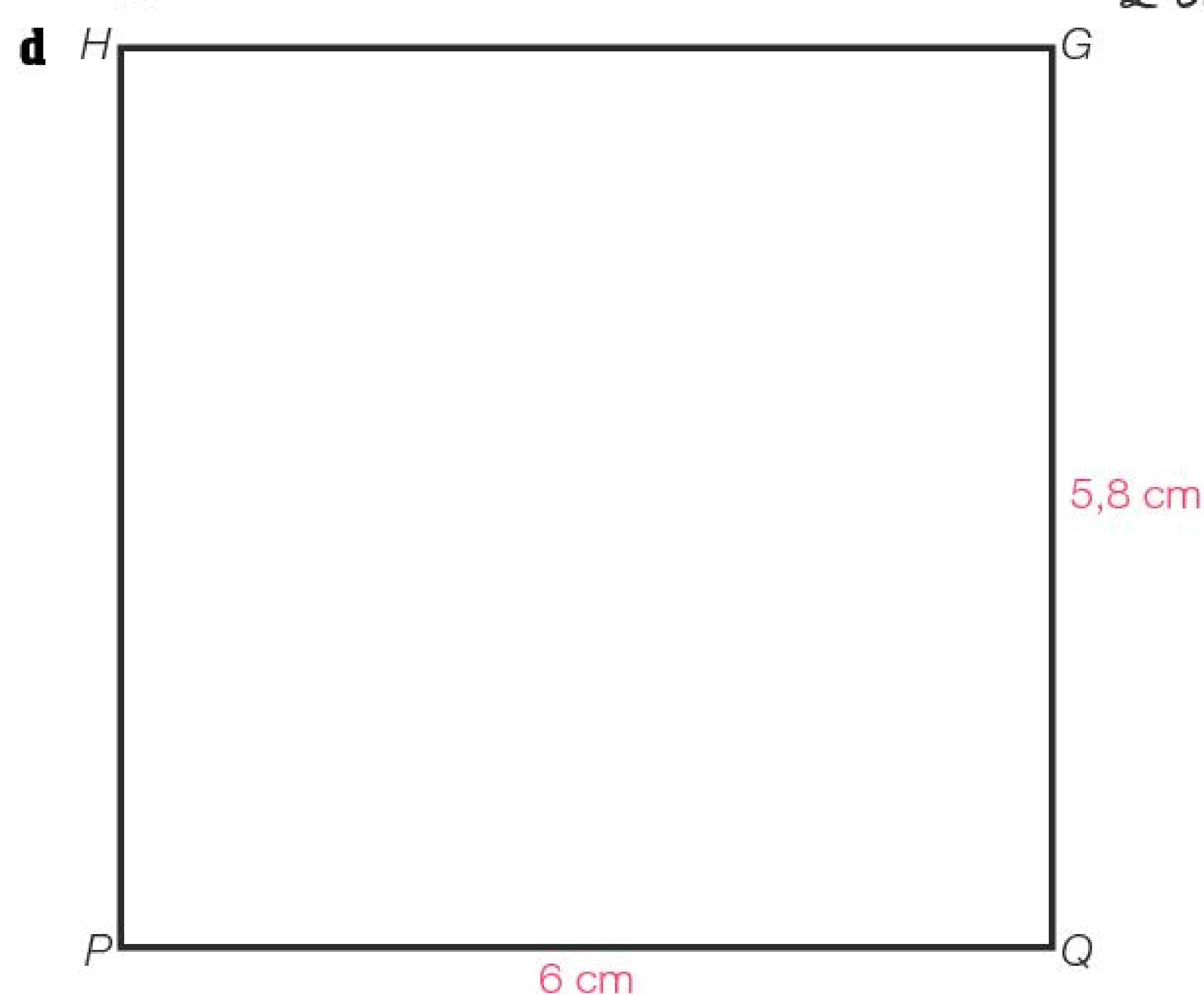
$$\begin{array}{rl} \text{rhz}^2 = & 9 \\ \text{rhz}^2 = & 25 \\ \hline ?\ \text{sz}^2 = & 34 \end{array} +$$

$\text{sz} = \sqrt{34} = 5{,}830...$

$QG = 5{,}8$ cm

**c** $PQ = AB = 6$ cm

**d**



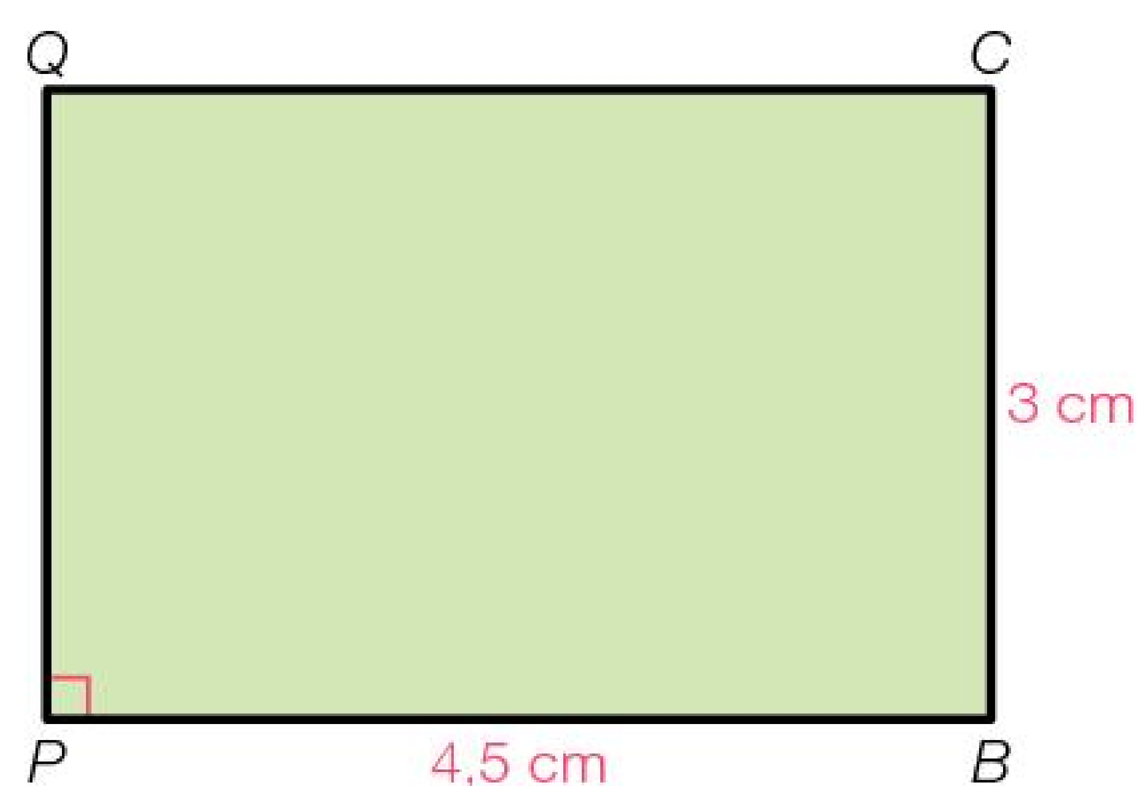

**2** **a**

$$\begin{array}{rl} \text{rhz}^2 = & 4 \\ \text{rhz}^2 = & 16 \\ \hline ?\ \text{sz}^2 = & 20 \end{array} +$$

$\text{sz} = \sqrt{20} = 4{,}472...$

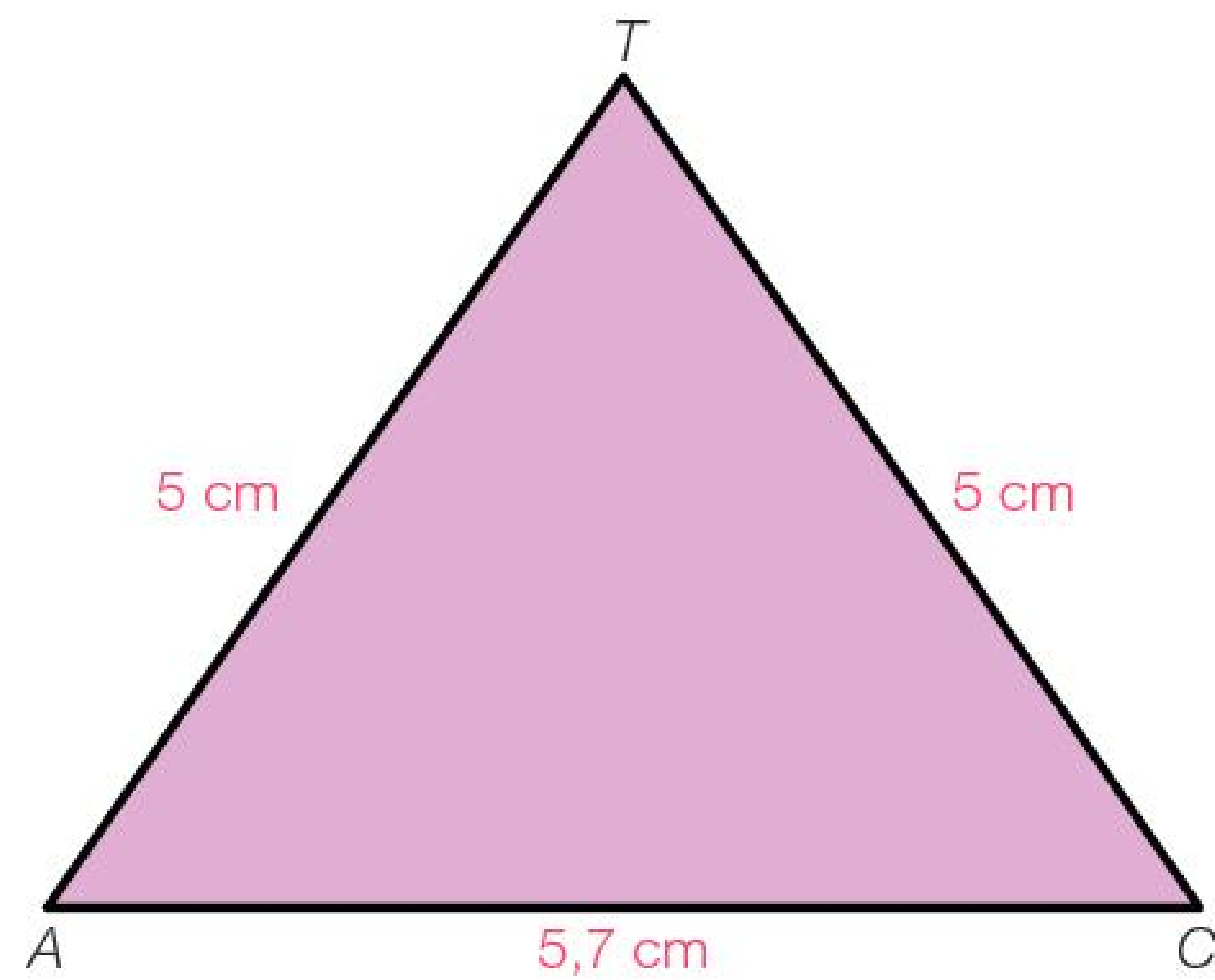
$PB = 4{,}5$ cm

**b** Zie de figuur hiernaast.

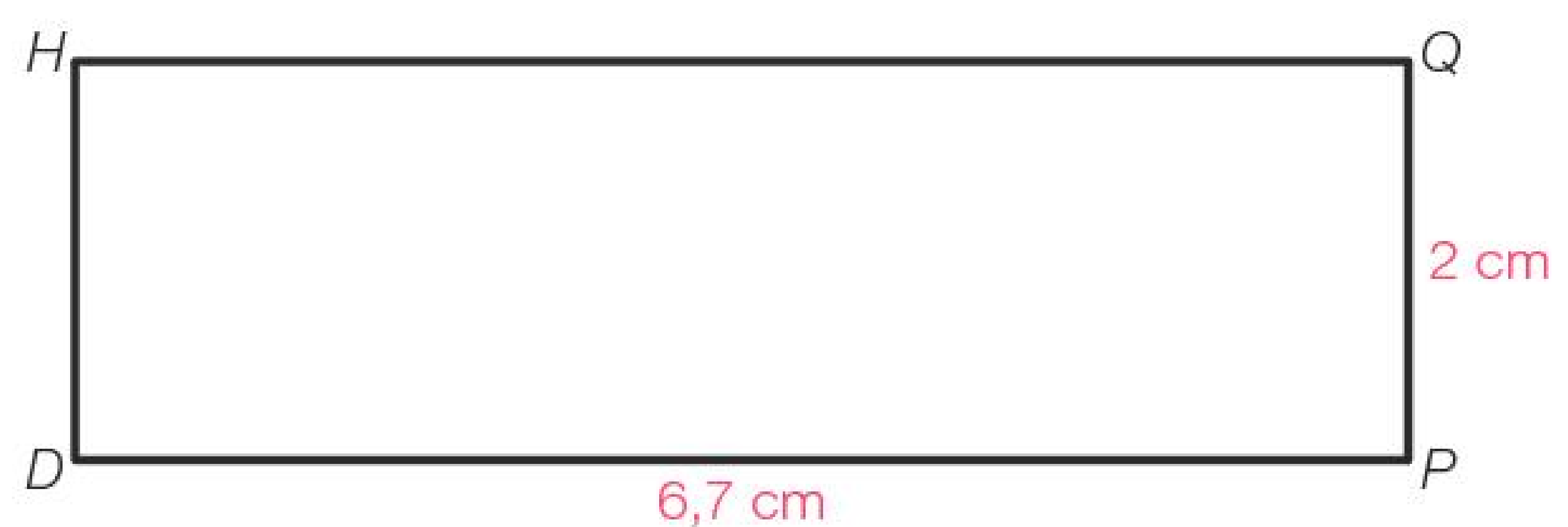


**3** $rhz^2 = 16$
$rhz^2 = 16$
——— +
? $sz^2 = 32$
$sz = \sqrt{32} = 5{,}656...$
$AC = 5{,}7$ cm
Zie de figuur hiernaast.




**4** $rhz^2 = 20{,}25$
$rhz^2 = 25$
——— +
? $sz^2 = 45{,}25$
$sz = \sqrt{45{,}25} = 6{,}726...$
$DP = 6{,}7$ cm
Zie de figuur hiernaast.

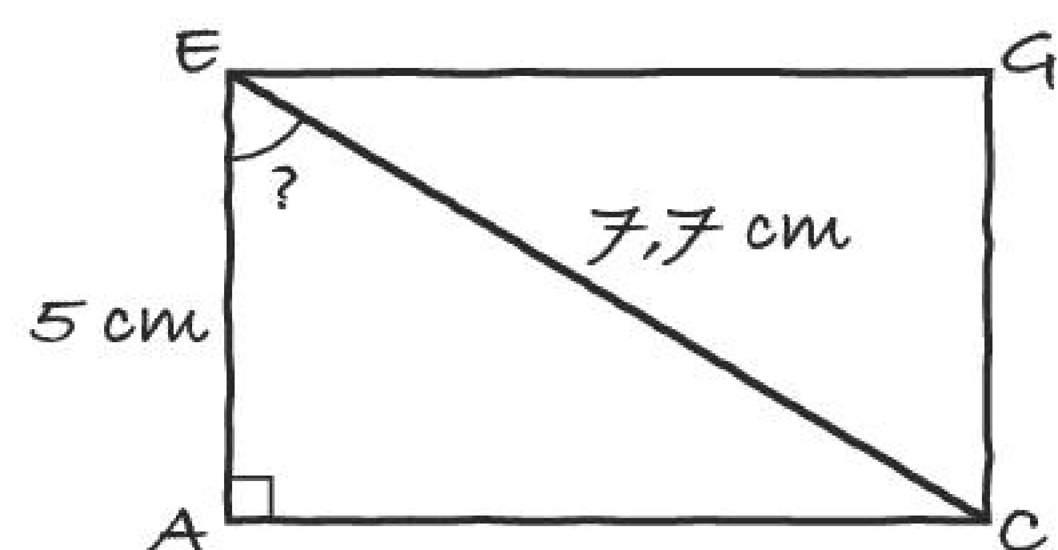



## 10.2 Berekeningen in de ruimte

**Bladzijde 84**

**5** **a** $rhz^2 = 9$
$rhz^2 = 25$
$rhz^2 = 25$
——— +
? $sz^2 = 59$
$sz = \sqrt{59} = 7{,}681...$
$CE = 7{,}7$ cm

**b,c** Zie de figuur hiernaast.

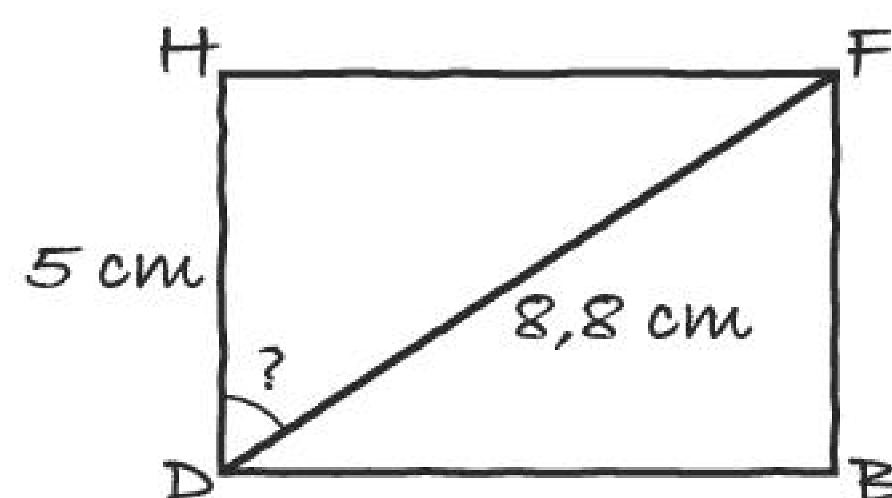



**d** $\cos \angle AEC = \frac{5}{7{,}7}$
$\angle AEC = 50°$

**6** **a** $rhz^2 = 16$
$rhz^2 = 36$
$rhz^2 = 25$
——— +
? $sz^2 = 77$
$sz = \sqrt{77} = 8{,}774...$
$DF = 8{,}8$ cm

**b** $\angle HDF$ ligt in diagonaalvlak *DBFH*.

**c** Zie de figuur hiernaast.




**d** $\cos \angle HDF = \dfrac{5}{8{,}8}$

$\angle HDF = 55°$

**Bladzijde 85**

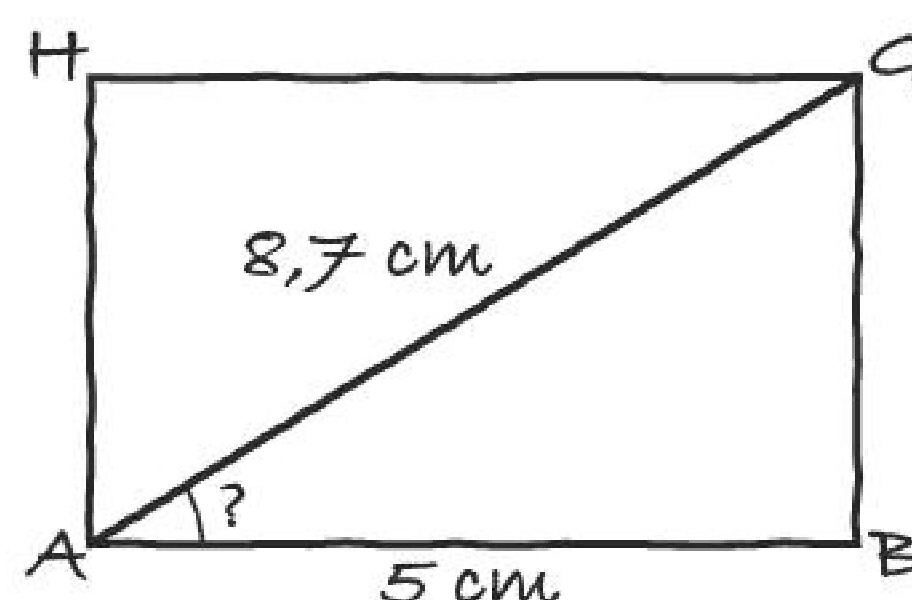
**7** **a**

$$\begin{array}{l} \text{rhz}^2 = 25 \\ \text{rhz}^2 = 25 \\ \text{rhz}^2 = 25 \\ \hline ?\ \text{sz}^2 = 75 \end{array} +$$

$\text{sz} = \sqrt{75} = 8{,}660...$

$AG = 8{,}7$ cm

**b** Zie de schets hiernaast.




$\cos \angle BAG = \dfrac{5}{8{,}7}$

$\angle BAG = 55°$

**8** **a**

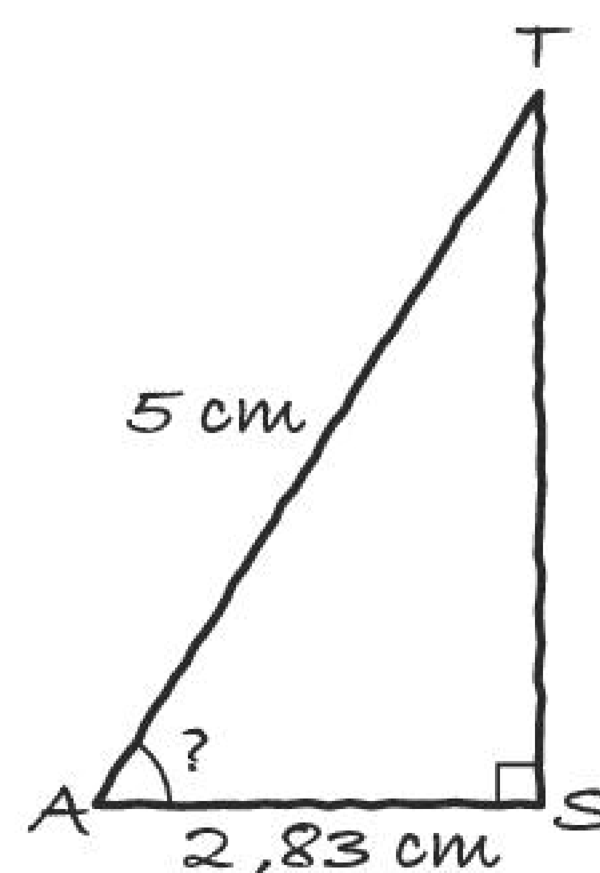
$$\begin{array}{l} \text{rhz}^2 = 16 \\ \text{rhz}^2 = 16 \\ \hline ?\ \text{sz}^2 = 32 \end{array} +$$

$\text{sz} = \sqrt{32} = 5{,}656...$

$AC = 5{,}66$ cm

$AS = 5{,}66 : 2 = 2{,}83$ cm

**b** Zie de schets hiernaast.




$\cos \angle TAS = \dfrac{2{,}83}{5}$

$\angle TAS = 56°$

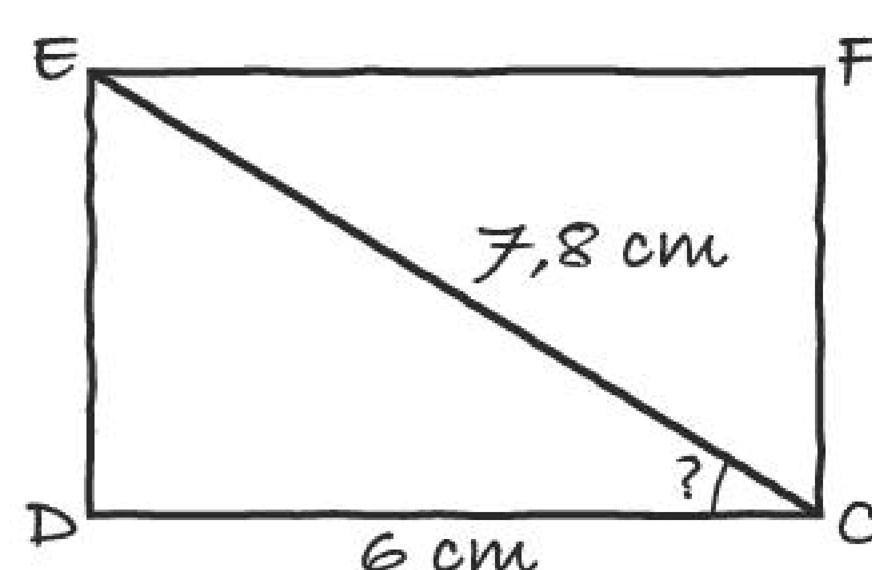
**9** **a**

$$\begin{array}{l} \text{rhz}^2 = 16 \\ \text{rhz}^2 = 36 \\ \text{rhz}^2 = \ \ 9 \\ \hline ?\ \text{sz}^2 = 61 \end{array} +$$

$\text{sz} = \sqrt{61} = 7{,}810...$

$CE = 7{,}8$ cm

**b** Zie de schets hiernaast.




$\cos \angle DCE = \dfrac{6}{7{,}8}$

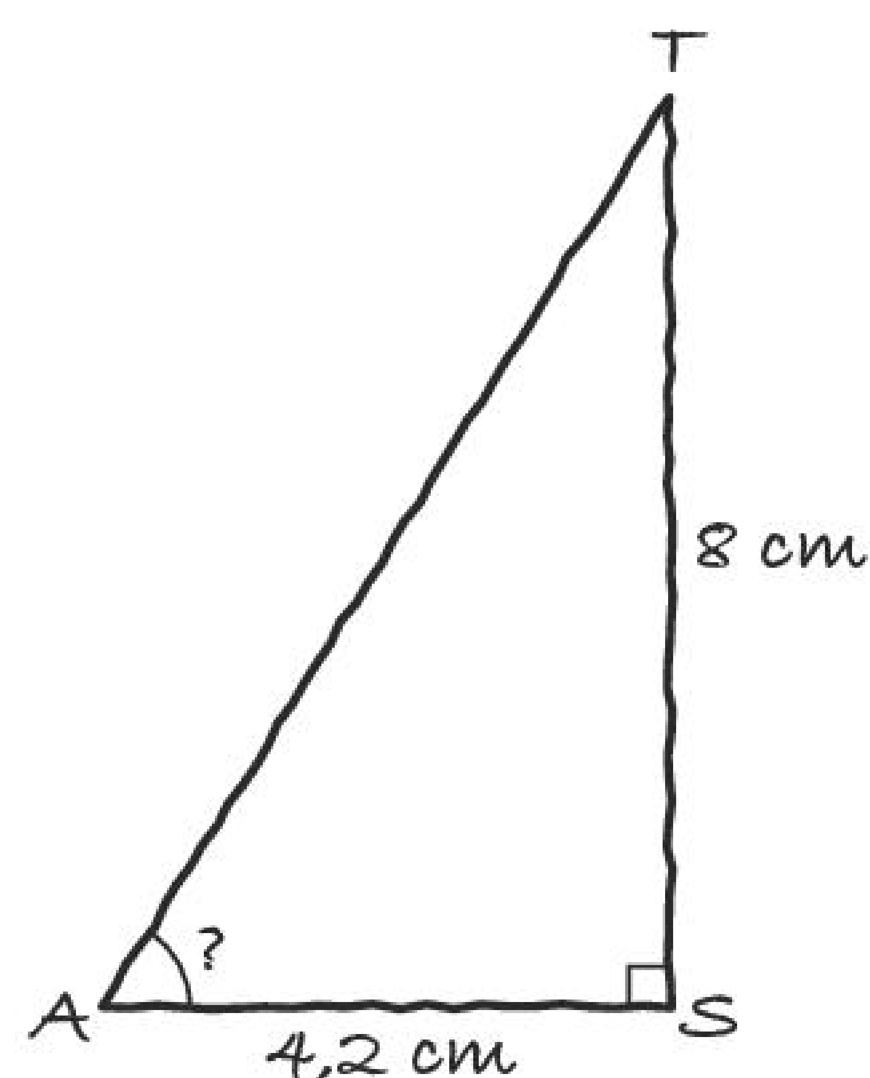
$\angle DCE = 40°$

**10** **a** $\text{rhz}^2 = 36$
$\text{rhz}^2 = 36$
$\overline{\phantom{rhz^2 = 36}}$ +
? $\text{sz}^2 = 72$
$\text{sz} = \sqrt{72} = 8{,}485...$
$AC = 8{,}49$ cm
$AS = 8{,}49 : 2 = 4{,}2$ cm

**b** Zie de schets hiernaast.

$\tan \angle SAT = \dfrac{8}{4{,}2}$

$\angle SAT = 62°$




**Bladzijde 86**

**11** **a** $\text{rhz}^2 = 36$
$\text{rhz}^2 = 16$
$\text{rhz}^2 = 16$
$\overline{\phantom{rhz^2 = 16}}$ +
? $\text{sz}^2 = 68$
$\text{sz} = \sqrt{68} = 8{,}246...$
$BS = 8{,}2$ cm

**b** $\text{rhz}^2 = 4$
$\text{rhz}^2 = 36$
$\text{rhz}^2 = 1$
$\overline{\phantom{rhz^2 = 1}}$ +
? $\text{sz}^2 = 41$
$\text{sz} = \sqrt{41} = 6{,}403...$
$RS = 6{,}4$ cm

## 10.3 Coördinaten in de ruimte

**Bladzijde 88**

**12** **a** De namen van de assen zijn: de $x$-as, de $y$-as en de $z$-as.
**b** Het punt $A$ ligt vanuit de oorsprong 0 in de $x$-richting, 3 in de $y$-richting en 2 in de $z$-richting.
**c** $B(6, 7, 0)$, $C(5, 0, 3)$, $D(0, 2, 0)$ en $E(0, 0, 7)$

**13** **a** $A(5, 0, 0)$ **c** $M(0, 2, 3)$
**b** $C(0, 4, 0)$ **d** $N(4, 4, 0)$

**14** $A(6, 0, 0)$, $B(6, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$, $E(6, 0, 5)$, $F(6, 6, 5)$, $G(0, 6, 5)$ en $H(0, 0, 5)$

**15** $P(6, 2, 0)$, $Q(3, 4, 3)$, $R(0, 2, 3)$, $S(6, 2, 3)$ en $T(3, 0, 0)$

# Trefwoordenregister

# Verantwoording

**Beeld**
Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.


**Colofon**
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

**Klimaatneutraal**
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

0 / 21



ISBN 978-90-01-74538-7

OVERSTAPDEEL **FLEX** | WISKUNDE | 12E EDITIE | 4 VMBO naar HAVO/MBO

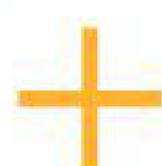
## Met FLEX heb je:

**Boeken die je mag houden**

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

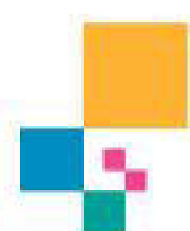
**Een persoonlijke digitale leeromgeving**

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



**Altijd actueel lesmateriaal**

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-74538-7